Die Ableitung der Umkehrfunktion

(Ableitung der Logarithmusfunktion)

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Inhaltsverzeichnis zur Umkehrregel
Ableitung der Logarithmusfunktion

Kapitel mit 96 Aufgaben

	Seite
WIKI Regeln und Formeln	03
Level 1 Grundlagen	
Aufgabenblatt 1 *(20 Aufgaben)*	05
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	06
Aufgabenblatt 2 *(34 Aufgaben)*	07
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	09
Level 2 Fortgeschritten	
Aufgabenblatt 2 *(20 Aufgaben)*	11
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	12
Aufgabenblatt 2 *(20 Aufgaben)*	15
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	17
Level 3 Expert	
Aufgabenblatt 1 *(2 Aufgaben)*	20
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	21

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Definition des Begriffs Ableitung

Merksatz

Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $(x|f(x))$. Sie entsteht über den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \longrightarrow 0$.

Einleitung

Die Umkehrregel ist die letzte der Ableitungsregeln, die wir kennen lernen. Im Kapitel

„Analysis → Differenzialrechnung → Funktionslehre Gymnasium → Umkehrfunktionen"

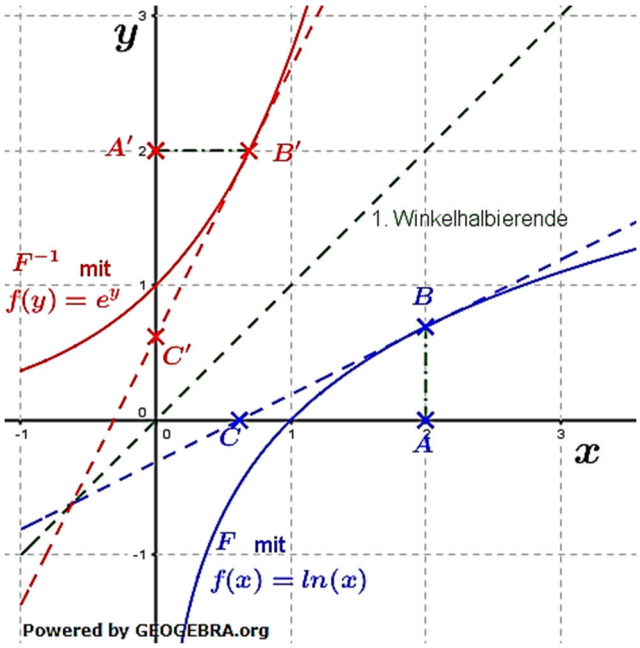
lernen wir, was eine Umkehrfunktion ist, nämlich die Spiegelung einer ausschließlich streng monoton steigenden bzw. streng monoton fallenden Funktion an der 1. Winkelhalbierenden. Selbstverständlich haben solche Funktionen ebenfalls einen Differenzialquotienten und damit eine Ableitung.

In diesem Kapitel lernen wir die Ableitungsregel für Umkehrfunktionen kennen.

Die Ableitung der Umkehrfunktion

Wir betrachten uns hierzu die Funktion f mit $f(x) = ln(x)$. Wie lautet die erste Ableitung $f'(x)$?

Die Umkehrfunktion des Logarithmus ist ja die Exponentialfunktion bzw. umgekehrt, die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist die Logarithmusfunktion. Mit $f(x) = ln(x)$ ist $f^{-1}(x) = e^x$ (beachte, dass die Schreibweise für die Umkehrfunktion der Ausdruck $f^{-1}(x)$ ist) deren Umkehrfunktion. Für $f^{-1}(x) = e^x$ dürfen wir auch schreiben $g(y) = e^y$. Die nachfolgende Abbildung zeigt die Graphen F und F^{-1} der beiden Funktionen f und f^{-1}.



In der Grafik erkennen wir, dass die Steigung der Tangente an F^{-1} sich aus $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$ bildet, die Steigung der Tangente an F aus $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. Nun sind die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ sowie $\overline{AC}$ und $\overline{A'C'}$ gleich lang. Mit anderen Worten: die Steigung der Tangente an F^{-1} ist gleich der reziproken Steigung der Tangente an F. Damit gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

Wegen $g'(y) = \frac{dx}{dy}$ ist $f'(x) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y}$.

Da jedoch $f(x) = y = ln(x)$ ist, ist

$$f'(x) = \frac{1}{e^{ln(x)}} = \frac{1}{x}.$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Betrachten wir nun die Funktion des allgemeinen Logarithmus f mit $f(x) = log_a(x)$. Gemäß den Logarithmusgesetzen lässt sich $log_a(x)$ umformen zu $\frac{ln(x)}{ln(a)} = \frac{1}{ln(a)} \cdot ln(x)$. Da wir nun aber die Ableitung von $ln(x)$ kennen, leiten wir daraus die Ableitung von $log_a(x)$ ab mit

$$f'(x) = \frac{1}{ln(a) \cdot x}$$

Andere Ableitungen mit der Umkehrregel

Zwar lassen sich auch andere Umkehrfunktionen als die Logarithmusfunktionen auch mit der Umkehrregel ableiten, dies ist jedoch umständlich und hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt.
Für die Funktion f mit $f(x) = y = \sqrt{x-2}$ ist $f^{-1}(x) = x^2 + 2$ wobei $f^{-1}(x)$ auch als $g(y) = x = y^2 + 2$ geschrieben werden kann. Nun gilt genau wie bei der Logarithmusfunktion $f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$ und $g'(y) = \frac{dx}{dy}$ bzw. $f'(x) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y}$. Da aber $y = \sqrt{x-2}$ ist, ist $f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x-2}}$.

Dies ist ein recht umständlicher Weg, den $f(x) = \sqrt{x-2}$ kann zu $f(x) = (x-2)^{\frac{1}{2}}$ umgeschrieben werden und damit mit der uns bereits bekannten Potenzregel abgeleitet werden zu $f'(x) = \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x-2}}$.

Für die Ableitung der Umkehrfunktionen von sin, cos und tan wird ebenfalls die Umkehrregel benötigt. Betrachten wir die Umkehrfunktion f der sin-Funktion mit $f(x) = arcsin(x)\,;\, -1 \leq x \leq +1$. Ihre Umkehrfunktion lautet $f^{-1}(x) = sin(x)$ bzw. $g(y) = x = \sin(y)$. Mit $f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$ erhalten wir $f'(x) = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\cos(arcsin(x))}$.
Für den relevanten Wertebereich gilt jedoch $\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$. Wir können den Nenner der Ableitung somit umschreiben:
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, womit wir die endgültige Form der Ableitung von $arcsin(x)$ erhalten.
Für die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen gilt somit:

$f(x) = arcsin(x) \mid f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $f(x) = arccos(x) \mid f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = arcsin(x) \mid f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Auch diese Auflistung dient lediglich der Vollständigkeit. Die Umkehrregel ist somit nur von Interesse für die Logarithmusfunktion und wir merken uns:

Merksatz Ableitung Umkehrfunktion und Logarithmus

Ist $x = g(y)$ die Umkehrfunktion von $y = f(x)$, so gilt $f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$.
Die Ableitung der Logarithmusfunktion mit $f(x) = ln(x)$ lautet $f'(x) = \frac{1}{x}$.
Die Ableitung der Logarithmusfunktion mit $f(x) = log_a(x)$ lautet $f'(x) = \frac{1}{ln(a)x}$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabenblatt Ableitungen
zur Umkehrregel (Ableitung der Logarithmusfunktion)

Level 1 – Grundlagen – Blatt 1

Dokument mit 20 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die Ableitungen der Logarithmusfunktionen.

$f_1(x) = 3 \cdot ln(x)$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot ln(x)$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = 3 \cdot ln(2x)$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = ln(0{,}5x) \cdot 2$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = a \cdot log_a(x)$	$f_5'(x) =$
$f_6(t) = \frac{1}{b} \cdot ln(t)$	$f_6'(t) =$
$f_7(t) = a^2 \cdot ln(\sqrt{2}t)$	$f_7'(t) =$

Aufgabe A2

Bilde die Ableitungen der Logarithmusfunktionen und vereinfache so weit wie möglich.

$f_1(x) = (4-x)(ln(3x) - 2)$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = (3-2x^2)\left(\frac{1}{2}ln(x) + 3x\right)$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = log_a(2x) - a$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = \frac{1}{ln(x)} \cdot (-4x^2 + 3)$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = 3ln(2x) \cdot (1 - ln(x))$	$f_5'(x) =$
$f_6(t) = (t+1) \cdot (t-1) \cdot \frac{1}{ln(2t)}$	$f_6'(t) =$
$f_7(t) = ln(3t) + ln(2t) - ln(t)$	$f_7'(t) =$

Aufgabe A3

Drei der sechs Ableitungen wurden falsch abgeleitet. Suche den Fehler und korrigiere.

$f_1(x) = ln(x) \cdot e^x$	$f_1'(x) = e^x\left(\frac{1}{x} + ln(x)\right)$
$f_2(x) = (2e^{ln(x)} + 1)(3ln(x^2) + 1)$	$f_2'(x) = 12\,ln(x^2) + \frac{1}{x}$
$f_3(x) = ln(4x+1) \cdot (sin(x) + 10)$	$f_3'(x) = \frac{1}{4x} \cdot (sin(x) + 10) - ln(4x+1) \cdot cos(x)$
$f_4(x) = 0{,}5 \cdot ln(x) \cdot (2e - 4e^2)$	$f_4'(x) = \frac{e-2e^2}{x}$
$f_5(x) = \frac{4}{ln(\sqrt{x})}$	$f_5'(x) = \frac{-4ln(\sqrt{x})}{x}$
$f_6(t) = (5x^3 - 2x) \cdot ln\left(\frac{1}{x}\right)$	$f_6'(t) = \frac{(15t^2-2)\cdot ln(t) - 5t^2 + 2}{ln^2(t)}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabenblatt Ableitungen

zur Umkehrregel (Ableitung der Logarithmusfunktion)

Lösungen

Level 1 – Grundlagen – Blatt 1

Lösung A1

$f_1(x) = 3 \cdot ln(x)$	$f_1'(x) = \frac{3}{x}$
$f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot ln(x)$	$f_2'(x) = \frac{1}{2x}$
$f_3(x) = 3 \cdot ln(2x)$	$f_3'(x) = \frac{3}{x}$
$f_4(x) = ln(0{,}5x) \cdot 2$	$f_4'(x) = \frac{2}{x}$
$f_5(x) = a \cdot log_a(x)$	$f_5'(x) = \frac{a}{ln(a) \cdot x}$
$f_6(t) = \frac{1}{b} \cdot ln(t)$	$f_6'(t) = \frac{1}{b \cdot t}$
$f_7(t) = a^2 \cdot ln(\sqrt{2}t)$	$f_7'(t) = \frac{a^2}{t}$

Lösung A2

$f_1(x) = (4-x)(ln(3x) - 2)$	$f_1'(x) = -(ln(3x-2) + \frac{1}{x}(4-x) = -ln(3x) + \frac{4}{x} + 1$
$f_2(x) = (3-2x^2)\left(\frac{1}{2}ln(x) + 3x\right)$	$f_2'(x) = -4x\left(\frac{1}{2}ln(x) + 3x\right) + \left(\frac{1}{2x} + 3\right)(3-2x^2)$ $= -x(2\,ln(x) + 18x + 1) + \frac{3}{2x} + 9$
$f_3(x) = log_a(2x) - a$	$f_3'(x) = \frac{1}{ln(a) \cdot x}$
$f_4(x) = \frac{1}{ln(x)} \cdot (-4x^2 + 3)$	$f_4'(x) = -\frac{-4x^2+3}{ln^2(x) \cdot x} + \frac{-8x}{ln(x)} = -\frac{4x^2(2\,ln(x)-1)+3}{ln^2(x) \cdot x}$
$f_5(x) = 3ln(2x) \cdot (1 - ln(x))$	$f_5'(x) = \frac{3}{x}(1 - ln(x)) - \frac{3\,ln(2x)}{x} = -\frac{3(ln(2x) + ln(x) - 1)}{x}$
$f_6(t) = (t+1) \cdot (t-1) \cdot \frac{1}{ln(2t)}$	$f_6'(t) = \frac{2t}{ln(2t)} - \frac{t^2-1}{t \cdot ln^2(2t)} = \frac{t^2(2\,ln(2t)-1)+1}{t \cdot ln^2(2t)}$
$f_7(t) = ln(3t) + ln(2t) - ln(t)$	$f_7'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}$

Lösung A3

$f_1(x) = ln(x) \cdot e^x$	$f_1'(x) = e^x\left(\frac{1}{x} + ln(x)\right)$
$f_2(x) = (2e^{ln(x)} + 1)(3ln(x^2) + 1)$	~~$f_2'(x) = 12\,ln(x^2) + \frac{1}{x}$~~ $f_2'(x) = \frac{12x\,ln(x)+14x+6}{x}$
$f_3(x) = ln(4x+1) \cdot (sin(x) + 10)$	~~$f_3'(x) = \frac{1}{4x} \cdot (sin(x) + 10) - ln(4x+1) \cdot cos(x)$~~ $f_3'(x) = \frac{4(sin(x)+10)}{4x+1} + ln(4x+1) \cdot cos(x)$
$f_4(x) = 0{,}5 \cdot ln(x) \cdot (2e - 4e^2)$	$f_4'(x) = \frac{e-2e^2}{x}$
$f_5(x) = \frac{4}{ln(\sqrt{x})}$	~~$f_5'(x) = \frac{-4ln(\sqrt{x})}{x}$~~ $f_5'(x) = \frac{-8}{x \cdot ln^2(x)}$
$f_6(t) = (5x^3 - 2x) \cdot ln\left(\frac{1}{x}\right)$	$f_6'(t) = \frac{(15t^2-2) \cdot ln(t) - 5t^2 + 2}{ln^2(t)}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabenblatt Ableitungen
zur Umkehrregel (Ableitung der Logarithmusfunktion)

Level 1 – Grundlagen – Blatt 2

Dokument mit 34 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die 1. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen $f_n(x)$.

$f_1(x) = ln^2(x)$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = ln^3(2x)$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = ln(x^2)$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = ln(x^3)$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = ln(5x^2 - 3)$	$f_5'(x) =$
$f_6(x) = lg(5x^2 - 3)$	$f_6'(x) =$
$f_7(x) = \frac{x}{\ln(\sqrt{x})}$	$f_7'(x) =$
$f_8(t) = ln(x) - ln\left(\frac{t}{2}\right)$	$f_8'(t) =$
$f_9(t) = 3\,ln^2(t) - 2ln(t)$	$f_9'(t) =$

Aufgabe A2

Ordne den gegebenen Ableitungsfunktionen $f_n'(x)$ ihre ursprüngliche Ausgangsfunktion $f_n(x)$ zu.

$f_1'(x) = \frac{4x-1}{4x^2-2x}$	$f_{10}(x) = ln(x) \cdot log_7(x)$
$f_2'(x) = -\frac{cos(x)}{sin(x-1)\cdot ln^2(sin(x)-1)}$	$f_{11}(x) = k \cdot ln^{k-1}(2x)$
$f_3'(x) = -\frac{\pi sin(ln(x))}{x}$	$f_{12}(x) = \frac{ln(x)}{log_5(x)}$
$f_4'(x) = \frac{42x^6}{4-x^7}$	$f_{13}(x) = \frac{ln(4x+5)}{e^{4x-5}}$
$f_5'(x) = -\frac{24}{ln(10)\cdot x}$	$f_{14}(x) = -2(2\,lg(x^3) + 3\,lg(x^2))$
$f_6'(x) = \frac{4\cdot((4x+5)\cdot ln(4x+5)-1)}{(4x+5)\cdot e^{4x-5}}$	$f_{15}(x) = ln((4-x^7)^{-6})$
$f_7'(x) = 0$	$f_{16}(x) = \pi cos(ln(x)) + 1$
$f_8'(x) = \frac{(k-1)\cdot k \cdot ln^{k-2}(2x)}{x}$	$f_{17}(x) = \frac{1}{ln(sin(x)-1)}$
$f_9'(x) = \frac{2\cdot ln(x)}{ln(7)\cdot x}$	$f_{18}(x) = 0{,}5 \cdot ln(4x^2 - 2x)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabenblatt Ableitungen
zur Umkehrregel (Ableitung der Logarithmusfunktion)

Level 1 – Grundlagen – Blatt 2

Aufgabe A3

Bilde die 1. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen $f_n(x)$.

$f_1(x) = ln((4x^2 - 2x)^3)$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = ln((x^3 - 2x)^m)$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = ln((x^5 - x^4)^5)$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = ln((3x^3 + 5x)^6)$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = ln(cos^7(x))$	$f_5'(x) =$
$f_6(x) = ln(2x^{-2} + 3x^2)$	$f_6'(x) =$
$f_7(x) = 27\,ln\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)$	$f_7'(x) =$
$f_8(x) = \frac{1}{ln(2x^2-4x)}$	$f_8'(x) =$
$f_9(x) = sin(ln(x + 5)$	$f_9'(x) =$
$f_{10}(x) = ln(sin(x + 5))$	$f_{10}'(x) =$
$f_{11}(x) = lg(7x + 5)$	$f_{11}'(x) =$
$f_{12}(x) = lg\left(\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)^4\right)$	$f_{12}'(x) =$
$f_{13}(x) = \frac{1}{ln(x-3)}$	$f_{13}'(x) =$
$f_{14}(x) = \frac{3ln(2x)}{(x^2-1)^2}$	$f_{14}'(x) =$
$f_{15}(x) = ln\left(\sqrt{x^3}\right)$	$f_{15}'(x) =$
$f_{16}(x) = log_a(\sqrt[3]{3 - 2x})$	$f_{16}'(x) =$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabenblatt Ableitungen

zur Umkehrregel (Ableitung der Logarithmusfunktion)

Lösungen

Level 1 – Grundlagen – Blatt 2

Lösung A1

$f_1(x) = ln^2(x)$	$f_1'(x) = \frac{2ln(x)}{x}$
$f_2(x) = ln^3(2x)$	$f_2'(x) = \frac{3\,ln^2(x)}{x}$
$f_3(x) = ln(x^2)$	$f_3'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$
$f_4(x) = ln(x^3)$	$f_4'(x) = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$
$f_5(x) = ln(5x^2 - 3)$	$f_5'(x) = \frac{10x}{5x^2-3}$
$f_6(x) = lg(5x^2 - 3)$	$f_6'(x) = \frac{10x}{ln(10)\cdot(5x^2-3)}$
$f_7(x) = \frac{x}{ln(\sqrt{x})} = \frac{2x}{ln(x)}$	$f_7'(x) = \frac{2\,(ln(x)-1)}{ln^2(x)}$
$f_8(t) = ln(x) - ln\left(\frac{t}{2}\right)$	$f_8'(t) = -\frac{1}{t}$
$f_9(t) = 3\,ln^2(t) - 2ln(t)$	$f_9'(t) = \frac{6\,ln(t)-2}{t}$

Lösung A2

$f_1'(x) = \frac{4x-1}{4x^2-2x}$	$f_{18}(x) = 0{,}5 \cdot ln(4x^2 - 2x)$
$f_2'(x) = -\frac{cos(x)}{sin(x-1)\cdot ln^2(sin(x)-1)}$	$f_{17}(x) = \frac{1}{ln(sin(x)-1)}$
$f_3'(x) = -\frac{\pi sin(ln(x))}{x}$	$f_{16}(x) = \pi cos(ln(x)) + 1$
$f_4'(x) = \frac{42x^6}{4 - x^7}$	$f_{15}(x) = ln((4 - x^7)^{-6})$
$f_5'(x) = -\frac{24}{ln(10)\cdot x}$	$f_{14}(x) = -2(2\,lg(x^3) + 3\,lg(x^2))$
$f_6'(x) = \frac{4\cdot((4x+5)\cdot ln(4x+5)-1)}{(4x+5)\cdot e^{4x-5}}$	$f_{13}(x) = \frac{ln(4x+5)}{e^{4x-5}}$
$f_7'(x) = 0$	$f_{12}(x) = \frac{ln(x)}{log_5(x)}$
$f_8'(x) = \frac{(k-1)\cdot k\cdot ln^{k-2}(2x)}{x}$	$f_{11}(x) = k \cdot ln^{k-1}(2x)$
$f_9'(x) = \frac{2\cdot ln(x)}{ln(7)\cdot x}$	$f_{10}(x) = ln(x) \cdot log_7(x)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A3

$f_1(x) = ln((4x^2 - 2x)^3)$	$f_1'(x) = \frac{3(4x^2-2x)^2 \cdot (8x-2)}{(4x^2-2x)^3} = \frac{3 \cdot (8x-2)}{4x^2-2x} = \frac{12x-3}{2x^2-x}$
$f_2(x) = ln((x^3 - 2x)^m)$	$f_2'(x) = \frac{m(x^3-2x)^{m-1} \cdot (3x^2-2)}{(x^3-2x)^m} = \frac{m \cdot (3x^2-2)}{x \cdot (x^2-2)}$
$f_3(x) = ln((x^5 - x^4)^5)$	$f_3'(x) = \frac{5 \cdot (5x^4-4x^3)}{x^5-x^4} = \frac{5x^3(5x-4)}{x^3(x^2-x)} = \frac{5(5x-4)}{x(x-1)}$
$f_4(x) = ln((3x^3 + 5x)^6)$	$f_4'(x) = \frac{6(9x^2+5)}{3x^3+5x} = \frac{6(9x^2+5)}{x(3x^2+5)}$
$f_5(x) = ln(cos^7(x))$	$f_5'(x) = -\frac{7\,cos^6(x) \cdot sin(x)}{cos^7(x)} = -\frac{7\,sin(x)}{cos(x)} = -7tan(x)$
$f_6(x) = ln(2x^{-2} + 3x^2)$	$f_6'(x) = \frac{-4x^{-3}+6x}{2x^{-2}+3x^2} = \frac{6x^4-4}{3x^5+2x}$
$f_7(x) = 27\,ln\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)$	$f_7'(x) = \frac{27\left(3x^2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3-\frac{1}{x}} = \frac{27(3x^4+1)}{x^5-x}$
$f_8(x) = \frac{1}{ln(2x^2-4x)}$	$f_8'(x) = -\frac{4(x-1)}{(2x^2-4x) \cdot ln^2(2x^2-4x)} = -\frac{2(x-1)}{x \cdot (x-2) \cdot ln^2(2x^2-4x)}$
$f_9(x) = sin(ln(x+5))$	$f_9'(x) = \frac{cos(ln(x+5))}{x+5}$
$f_{10}(x) = ln(sin(x+5))$	$f_{10}'(x) = \frac{cos(x+5)}{sin(x+5)}$
$f_{11}(x) = lg(7x+5)$	$f_{11}'(x) = \frac{7}{ln(10) \cdot (7x+5)}$
$f_{12}(x) = lg\left(\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)^4\right)$	$f_{12}'(x) = \frac{4\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)^3 \cdot (x+2)}{ln(10) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)^4} = \frac{4 \cdot (x+2)}{ln(10) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)} = \frac{8(x+2)}{ln(10) \cdot x \cdot (x+4)}$
$f_{13}(x) = \frac{1}{ln(x-3)}$	$f_{13}'(x) = -\frac{1}{(x-3) \cdot ln^2(x-3)}$
$f_{14}(x) = \frac{3ln(2x)}{(x^2-1)^2}$	$f_{14}'(x) = \frac{\frac{6 \cdot (x^2-1)^2}{2x} - 3\,ln(2x) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{3(x^2-1)-12x^2 \cdot ln(2x)}{x \cdot (x^2-1)^3}$
$f_{15}(x) = ln\left(\sqrt{x^3}\right)$	$f_{15}'(x) = \frac{1}{3x}$
$f_{16}(x) = log_a(\sqrt[3]{3-2x})$	$f_{16}'(x) = -\frac{2}{3 \cdot ln(a)(3-2x)} = \frac{2}{3 \cdot ln(a)(2x-3)}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabenblatt Ableitungen zur Umkehrregel (Ableitung der Logarithmusfunktion)

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Dokument mit 20 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die ersten beiden Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$ der nachfolgend gegebenen Umkehrfunktionen und vereinfache soweit wie möglich.

a) $f(x) = ln\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $f(x) = ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

c) $f(x) = ln^2\left(\frac{1}{x}\right)$

d) $f(x) = ln^2\left(\frac{1}{x^2}\right)$

e) $f(x) = \frac{1}{ln(x)}$

f) $f(x) = \frac{1}{ln(x^2)}$

g) $f(x) = \frac{1}{ln^2(x)}$

h) $f(x) = \frac{1}{ln^2(x^2)}$

Lösungstipp: Forme einige der gegebenen Funktionen zuerst nach den Logarithmusgesetzen um.

Aufgabe A2

Berechne die Steigung des Graphen der Funktionen f an der gegebenen Stelle x_0.

a) $f(x) = ln(\sqrt{x});\ x_0 = 4$

b) $f(x) = ln(2x^2);\ x_0 = 4$

c) $f(x) = sin(\pi \cdot lg(x));\ x_0 = 10$

d) $f(x) = ln^2\left(\frac{1}{2}x\right);\ x_0 = 2$

e) $f(x) = -cos(\ln(x^2));\ x_0 = e^{\frac{\pi}{4}}$

f) $f(x) = 3(x - log_5(x));\ x_0 = \frac{2}{ln(5)}$

g) $f(x) = \frac{2}{lg^4(x)};\ x_0 = 10$

h) $f(x) = ln(2{,}5x^3 + 0{,}75);\ x_0 = 0$

Aufgabe A3

An welchen Stellen verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel?

a) $f(x) = ln((2x+4)^2);\ \ g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$

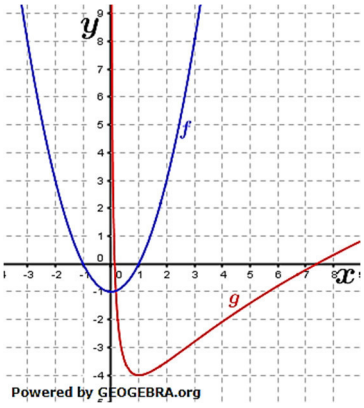
b) $f(x) = -\frac{1}{ln(x)};\ \ g(x) = ln(x)$

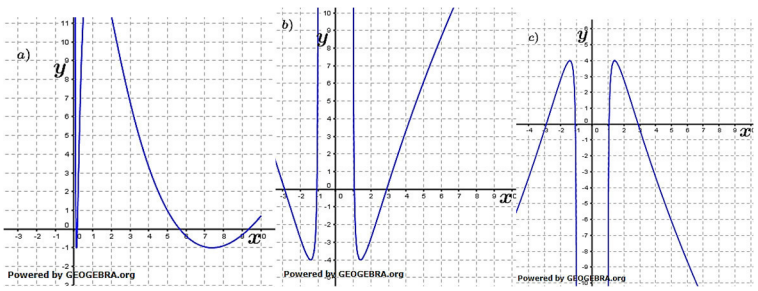
c) $f(x) = sin(ln(x));\ g(x) = cos(ln(x));\ 0 < x \leq 2\pi;$

Aufgabe A4

Die Grafik zeigt die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = x^2 - 1$, und g mit $g(x) = \ln^2(x) - 4$.

Gib an welcher der nachfolgend abgebildeten Graphen der Graph der Funktion h mit $h(x) = f(g(x))$ ist. Kannst du eine Aussage über die anderen beiden Graphen machen?





Lösung A1

a) $f(x) = ln\left(\frac{1}{x}\right) = ln(1) - ln(x) = -ln(x)$

$f'(x) = -\frac{1}{x}$ $\quad f''(x) = \frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = ln(1) - ln(x^2) = -2ln(x)$

$f'(x) = -\frac{2}{x}$ $\quad f''(x) = \frac{2}{x^2}$

c) $f(x) = ln^2\left(\frac{1}{x}\right) = ln^2(x)$

$f'(x) = \frac{2ln(x)}{x}$ $\quad f''(x) = \frac{2x\cdot\frac{1}{x} - 2\,ln(x)}{x^2} = \frac{2(1-ln(x))}{x^2}$

d) $f(x) = ln^2\left(\frac{1}{x^2}\right) = 4ln^2(x)$

$f'(x) = \frac{8ln(x)}{x}$ $\quad f''(x) = \frac{8(1-ln(x))}{x^2}$

e) $f(x) = \frac{1}{ln(x)} = ln^{-1}(x)$

$f'(x) = -\frac{ln^{-2}(x)}{x} = -\frac{1}{x\cdot ln^2(x)}$ $\quad f''(x) = \frac{ln(x)+2}{x^2\,ln^3(x)}$

f) $f(x) = \frac{1}{ln(x^2)} = \frac{1}{2\ln(x)}$

$f'(x) = -\frac{1}{2x\cdot ln^2(x)}$ $\quad f''(x) = \frac{ln(x)+2}{2x^2\,ln^3(x)}$

g) $f(x) = \frac{1}{ln^2(x)} = ln^{-2}(x)$

$f'(x) = -\frac{2}{x\cdot ln^3(x)}$ $\quad f''(x) = \frac{2\,ln(x)+6}{x^2\cdot ln^4(x)}$

h) $f(x) = \frac{1}{ln^2(x^2)} = \frac{1}{4\ln^2(x)}$

$f'(x) = -\frac{1}{2x\cdot\ln^3(x)}$ $\quad f''(x) = \frac{ln(x)+3}{2x^2\cdot ln^4(x)}$

Lösung A2

a) $f(x) = ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\cdot\ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{2x}$ $\quad f'(2) = \frac{1}{4}$

b) $f(x) = ln(2x^2)$

$f'(x) = \frac{1}{2x^2}\cdot 4x = \frac{2}{x}$ $\quad f'(4) = \frac{1}{2}$

c) $f(x) = sin(\pi\cdot lg(x))$

$f'(x) = \frac{\pi}{\ln(10)x}\cdot cos\left(\pi\frac{\ln(x)}{\ln(10)}\right)$ $\quad f'(10) = -\frac{\pi}{10\cdot ln(10)}$

d) $f(x) = ln^2\left(\frac{1}{2}x\right)$

$f'(x) = \frac{2\,ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$ $\quad f'(2) = 0$

e) $f(x) = -cos(ln(x^2) = -cos(2\,ln(x))$

$f'(x) = \frac{2}{x}\cdot sin(2\,ln(x))$ $\quad f'\left(e^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{2}{e^{\frac{\pi}{4}}}$

f) $f(x) = 3(x - log_5(x))$

$f'(x) = 3\cdot\left(1 - \frac{1}{\ln(5)\cdot x}\right)$ $\quad f'\left(\frac{2}{\ln(5)}\right) = \frac{3}{2}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

g) $f(x)=\frac{2}{lg^4(x)}$

$f'(x)=\frac{8\,ln^4(10)}{x ln^5(x)}$ $\qquad f'(10)=\frac{8\cdot ln^4(10)}{10\cdot ln^5(10)}=\frac{4}{5\cdot ln(10)}$

h) $f(x)=ln(2{,}5x^3+0{,}75)$

$f'(x)=\frac{7{,}5x^2}{2{,}5x^3+0{,}75}\cdot$ $\qquad f'(0)=\frac{4}{3}$

Lösung A3

a) $f(x)=ln((2x+4)^2)$ $\qquad g(x)=\frac{1}{4}x^2+2x$

$f'(x)=\frac{2}{x+2}$ $\qquad g'(x)=\frac{1}{2}x+2$

$f'(x)\cap g'(x)$

$\frac{2}{x+2}=\frac{1}{2}x+2$ $\quad|\quad \cdot x+2$

$2=\frac{x^2+2x}{2}+2x+4$ $\quad|\quad -2;\ \cdot 2$

$x^2+6x+4=0$

$x_{1,2}=-3\pm\sqrt{9-4}=-3\pm\sqrt{5}$ $\quad|\quad p/q$-Formel

$x_1=-3+\sqrt{5};\ \ x_2=-3-\sqrt{5}$

An den Stellen $x_1=-3+\sqrt{5}$ und $x_1=-3-\sqrt{5}$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

b) $f(x)=-\frac{1}{ln(x)}$ $\qquad g(x)=ln(x)$

$f'(x)=\frac{1}{x\cdot ln^2(x)}$ $\qquad g'(x)=\frac{1}{x}$

$f'(x)\cap g'(x)$

$\frac{1}{x\cdot ln^2(x)}=\frac{1}{x}$

$ln^2(x)=1$

$|ln(x)|=1$

$x_1=e;\ \ x_2=\frac{1}{e}$

An den Stellen $x_1=e$ und $x_2=\frac{1}{e}$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

c) $f(x)=sin(ln(x))$ $\qquad g(x)=cos(\ln(x))$

$f'(x)=\frac{1}{x}cos(\ln(x))$ $\qquad g'(x)=-\frac{1}{x}si\,n(ln(x))$

$f'(x)\cap g'(x)$

$\frac{1}{x}cos(\ln(x))=-\frac{1}{x}sin(\ln(x))$

$cos(\ln(x))=-sin(\ln(x))$

$\ln(x_1)=\frac{3}{4}\pi;\ \ln(x_2)=\frac{7}{4}\pi$

$x_1=e^{0{,}75\pi};\ \ x_2=e^{1{,}75\pi}$

An den Stellen $x_1=e^{0{,}75\pi}$ und $x_2=e^{1{,}75\pi}$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A4

Abbildung a) zeigt den Graphen der Funktion h mit $h(x) = f(g(x))$.
Wir haben keine anderen Anhaltspunkte als die Nullstellen.
$f(g(x))$ hat Nullstellen, wenn $(ln^2(x) - 4)^2 = 1$ oder -1 ist. Dies ist der Fall, wenn $ln^2(x) = 5$ oder $ln^2(x) = 3$ ist. $ln^2(x) = 5 \Longrightarrow ln(x) = \pm\sqrt{5} \Longrightarrow ln(x_{1,2}) = \pm\sqrt{5}$. $ln^2(x) = 3 \Longrightarrow ln(x) = \pm\sqrt{3} \Longrightarrow ln(x_{3,4}) = \pm\sqrt{3}$. Wir entlogarithmieren die Lösungen und erhalten: $x_1 = e^{-\sqrt{5}} \approx 0{,}11$; $x_2 = e^{\sqrt{5}} \approx 9{,}4$; $x_3 = e^{-\sqrt{3}} \approx 0{,}18$; $x_4 = e^{\sqrt{3}} \approx 5{,}7$. Nur der Graph von a) besitzt dort Nullstellen.
Abbildung b) zeigt den Graphen der Funktion h mit $h(x) = g(f(x)) = ln^2(x^2 - 1) - 4$. Dies ergibt sich aus der Betrachtung des globalen Verhaltens, denn für $x \longrightarrow |\infty|$ gilt $h(x) \longrightarrow \infty$.
Abbildung c) zeigt den an der x-Achse gespiegelten Graphen von b).

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabenblatt Ableitungen zur Umkehrregel (Ableitung der Logarithmusfunktion)

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

Dokument mit 20 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die erste Ableitung $f'(x)$ der nachfolgend gegebenen, verketteten Logarithmusfunktionen und vereinfache soweit wie möglich.

a) $f(x) = sin(ln(x))$

b) $f(x) = cos(ln(x^2))$

c) $f(x) = 3ln(si\,n(2x))$

d) $f(x) = \frac{1}{3}ln(3x^4 - x^2)$

e) $f(x) = \frac{1}{2}(2 - ln(4x))^{-3}$

f) $f(x) = cos(ln(5x) + 2)$

g) $f(x) = log_a(cos^2(x))$

h) $f(x) = log_a(\,sin(1 - 3x^2))$

Aufgabe A2

Berechne die Stellen x_0 des Graphen an der die Funktionen f die Steigung m haben.

a) $f(x) = ln(x + ln(x))\,;\ m = 2$

b) $f(x) = si\,n(0{,}5ln(x^2) + 1)\,;\ m = \frac{1}{2}$;

c) $f(x) = ln(sin(ln(x)))\,;\ m = 1$

d) $f(x) = ln(ln(x^2));\ m = 2$

e) $f(x) = sin(cos(ln(x)))\,;\ m = 0; 0 \le x \le \pi$

f) $f(x) = 3\left(ln(x) - l\,n\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2\,;\ m = 1$

g) $f(x) = \frac{2}{ln(x^2+1)};\ m = -1$

h) $f(x) = ln((2{,}5x^3 + 0{,}75)^3);\ m = -2{,}5$

Aufgabe A3

An welchen Stellen verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel?

a) $f(x) = ln(5x + 1);\quad g(x) = 5x;$

b) $f(x) = e^{3x^2-12};\quad g(x) = ln(3x^2 - 12)$

c) $f(x) = ln^2\left(\frac{1}{x}\right);\quad g(x) = ln(2x)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

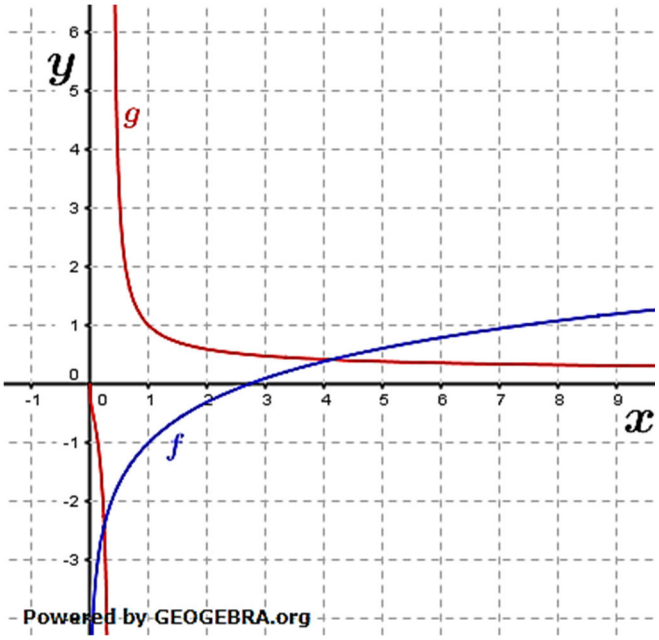
Aufgabenblatt Ableitungen zur Umkehrregel (Ableitung der Logarithmusfunktion)

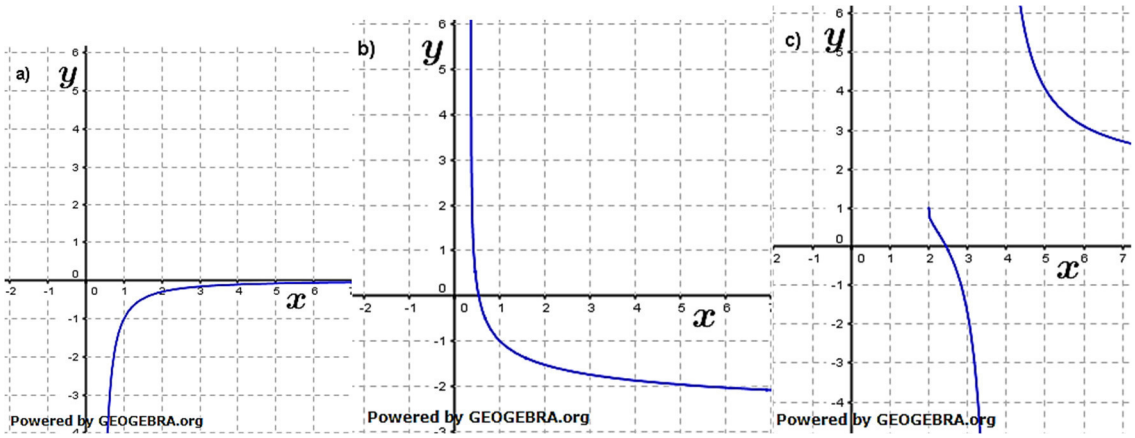
Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

Aufgabe A4

Die Grafik zeigt die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = ln(x) - 1$, und g mit $g(x) = \frac{1}{ln(x)} + 1$.

Gib an welcher der nachfolgend abgebildeten Graphen der Graph der Funktion h mit $h(x) = f\big(g(x)\big)$ ist, welcher die Ableitungsfunktion ist und welcher Graph zu keinem von beiden passt.





© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

a) $f(x) = sin(ln(x))$
$f'(x) = \frac{cos(ln(x))}{x}$

b) $f(x) = cos(ln(x^2))$
$f'(x) = -\frac{2sin(2ln(x))}{x}$

c) $f(x) = 3ln(si\,n(2x))$
$f'(x) = \frac{6cos(2x)}{sin(2x)}$

d) $f(x) = \frac{1}{3}ln(3x^4 - x^2)$
$f'(x) = \frac{12x^2-2}{9x^3-3x}$

e) $f(x) = \frac{1}{2}(2 - ln(4x))^{-3}$
$f'(x) = \frac{3}{2x(ln(4x)-2)^4}$

f) $f(x) = cos(ln(5x) + 2)$
$f'(x) = -\frac{sin(ln(5x)+2)}{x}$

g) $f(x) = log_a(cos^2(x))$
$f'(x) = -\frac{2sin(x)}{ln(a)\cdot cos(x)}$

h) $f(x) = log_a(\sin(1 - 3x^2))$
$f'(x) = \frac{6x\cdot cos(3x^2-1)}{ln(a)\cdot sin(3x^2-1)}$

Lösung A2

a) $f(x) = ln(x + ln(x))$
$f'(x) = \frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln(x)}$
$\frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln(x)} = 2 \implies 2 \cdot (x + \ln(x)) = 1 + \frac{1}{x}$
$x_0 = 1$
Probe $x_0 = 1$:
$2 \cdot (1 + \ln(1) \stackrel{?}{=} 1 + \frac{1}{1}$
$2 + 2 \cdot 0) = 2$
f hat an der Stelle $x_0 = 1$ die Steigung $f'(1) = 2$

b) $f(x) = si\,n(0{,}5ln(x^2) + 1) = sin(ln(x) + 1)$
$f'(x) = \frac{cos(ln(x)+1)}{x}$
$\frac{cos(ln(x)+1)}{x} = \frac{1}{2} \implies \frac{\cos(\ln(x)+1)}{x} - \frac{1}{2} = 0$
$x_1 \overset{GTR}{\approx} 0{,}08; \quad x_2 \overset{GTR}{\approx} 1{,}03$
f hat an der Stelle $x_1 \approx 0{,}08$ sowie $x_2 \approx 1{,}03$ die Steigung $m = \frac{1}{2}$.

c) $f(x) = ln(sin(ln(x)))$
$f'(x) = \frac{cos(ln(x))}{x\cdot sin(\ln(x))}$
$\frac{cos(ln(x))}{x\cdot sin(\ln(x))} = 1$
$x_1 \overset{GTR}{\approx} 0{,}174; \quad x_2 \overset{GTR}{\approx} 1{,}701$
f hat an der Stelle $x_1 \approx 0{,}17$ sowie $x_{21} \approx 1{,}7$ die Steigung $m = 1$.

d) $f(x) = ln(ln(x^2))$
$f'(x) = \frac{1}{x\cdot ln(x)}$
$\frac{1}{x\cdot ln(x)} = 2 \implies x_0 \overset{GTR}{\approx} 1{,}42$
f hat an der Stelle $x_0 \approx 1{,}42$ die Steigung $m = 2$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

e) $f(x) = sin(co\,s(ln(x))$

$f'(x) = \frac{-sin(ln(x))\cdot cos(\cos(\ln(x)))}{x}$

$-sin(ln(x)) \cdot cos(cos(ln(x))) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$-sin(\ln(x)) = 0 \Rightarrow l\,n(x_1) = 0;\ l\,n(x_2) = \pi \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = e^{\pi}$

$cos(cos(ln(x))) = 0 \Rightarrow cos(ln(x)) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ keine Lösung, da $-1 \leq cos(x) \leq 1$ und $\frac{\pi}{2} > 1$.

f hat an den Stellen $x_1 = 1$ sowie $x_2 = e^{\pi}$ die Steigung $m = 0$.

f) $f(x) = 3\left(ln(x) - l\,n\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = 12\,ln^2(x)$

$f'(x) = \frac{24ln(x)}{x}$

$\frac{24\ln(x)}{x} = 1 \Rightarrow 24\,ln(x) = x \Rightarrow x_0 \overset{GTR}{\approx} 1{,}044$

f hat an der Stelle $x_0 \approx 1{,}044$ die Steigung $m = 1$.

g) $f(x) = \frac{2}{ln(x^2+1)}$

$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2+1)\cdot\ln^2(x^2+1)}$

$-\frac{4x}{(x^2+1)\cdot\ln^2(x^2+1)} = -1 \Rightarrow 4x = (x^2+1)\cdot\ln^2(x^2+1);\ x \neq 0$

$x_0 \overset{GTR}{\approx} 1{,}67$

Hinweis:

$x = 0$ muss hier ausgeschlossen werden, da dann im Nenner über $ln^2(0^2+1) = ln^2(1) = 0$ eine Definitionslücke entsteht.

f hat an der Stelle $x_0 \approx 1{,}67$ die Steigung $m = -1$.

h) $f(x) = ln((2{,}5x^3 + 0{,}75)^3) = 3ln(2{,}5x^3 + 0{,}75)$

$f'(x) = \frac{45x^2}{2(2{,}5x^3+0{,}75)}$

$\frac{45x^2}{2(2{,}5x^3+0{,}75)} = -2{,}5 \Rightarrow x_0 \overset{GTR}{\approx} -3{,}62$

f hat an der Stelle $x_0 = -3{,}62$ die Steigung $m = -2{,}5$.

Lösung A3

a) $f(x) = ln(5x+1)$ $\qquad$ $g(x) = 5x$

$f'(x) = \frac{5}{5x+1}$ $\qquad$ $g'(x) = 5$

$f'(x) \cap g'(x)$

$\frac{5}{5x+1} = 5$

$5x + 1 = 1 \Rightarrow x_0 = 0$

An der Stelle $x_0 = 0$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel. Wegen $f(0) = 0 = g(0)$ ist der Graph der Funktion g Tangente an den Graphen von f.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) $f(x) = e^{3x^2-12}$ $\quad g(x) = ln(3x^2 - 12)$

$f'(x) = 6x \cdot e^{3x^2-12}$ $\quad g'(x) = \frac{2x}{x^2-4}$

$f'(x) \cap g'(x)$

$6x \cdot e^{3x^2-12} = \frac{2x}{x^2-4}$

$x \cdot \left(6e^{3x^2-12} - \frac{2}{x^2-4}\right) = 0$ $\quad$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$6e^{3x^2-12} - \frac{2}{x^2-4} \Rightarrow$ keine weitere Lösung

An der Stelle $x_1 = 0$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

c) $f(x) = ln^2\left(\frac{1}{x}\right) = ln^2(x)$ $\quad g(x) = ln(2x)$

$f'(x) = \frac{2ln(x)}{x}$ $\quad g'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) \cap g'(x)$

$\frac{2ln(x)}{x} = \frac{1}{x}$

$2ln(x) = 1$

$ln(x) = \frac{1}{2}$

$x_0 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

An den Stellen $x_0 = \sqrt{e}$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

Lösung A4

$h(x) = f(g(x)) = ln\left(\frac{1}{ln(x)+1}\right) - 1$

Abbildung b) zeigt den Graphen der Funktion h mit $h(x) = f(g(x))$, denn:
Untersuchung der Nullstellen:

$ln\left(\frac{1}{ln(x)+1}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \; ln\left(\frac{1}{ln(x)+1}\right) = 1$

$\frac{1}{ln(x)+1} = e$ $\quad$ | Entlogarithmieren

$e \cdot \ln(x) + e = 1$

$\ln(x) = \frac{1-e}{e}$ $\quad$ | Entlogarithmieren

$x = e^{\frac{1-e}{e}} \approx 0{,}5315$

Nur Abbildung b) hat die Nullstelle $x_0 \approx 0{,}5$.

Abbildung a) zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion h', denn:
h ist im dargestellten Bereich streng monoton fallend. Damit muss h' im dargestellten Bereich unterhalb der x-Achse verlaufen.

Abbildung c) zeigt das Schaubild der Funktion k mit $k(x) = g(f(x)) = \frac{1}{ln(ln(x-1))} + 1$.
$\mathbb{D}_k \in \mathbb{R};\; x > 2$, da für $x < 1$ $ln(x-1)$ nicht definiert ist und für $1 < x < 2$ $ln(x-1) < 0$ und damit $ln(ln(x-1))$ wiederum nicht definiert ist. Abbildung c) hat den Definitionsbereich $\mathbb{D}_k \in \mathbb{R};\; x > 2$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabenblatt Ableitungen zur Umkehrregel (Ableitung der Logarithmusfunktion)

Level 3 – Expert – Blatt 1

Dokument mit 2 Aufgaben

Aufgabe A1

Zeige, dass die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \log_a(b \cdot x)$ lautet:

$$f'(x) = \frac{1}{ln(a) \cdot x}$$

Aufgabe A2

Zeige, dass die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \log_a(b \cdot x^c)$ lautet:

$$f'(x) = \frac{c}{ln(a) \cdot x}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

$f(x) = \log_a(b \cdot x)$

Um die Ableitung zu bewerkstelligen, wenden wir zunächst einmal die Logarithmengesetze an.

Ein Ausdruck $\log_a(x)$ lässt sich umschreiben zu beispielsweise $\frac{lg(x)}{lg(a)}$, mit lg als Abkürzung des 10er-Logarithmus (Logarithmus zur Basis 10).

Statt des 10er-Logarithmus kann auch der natürliche Logarithmus ln angewandt werden, so ist $log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$. Da wir aber die Ableitung von $ln(x)$ mit $\frac{1}{x}$ kennen, gilt:

$$f(x) = \log_a(b \cdot x) = \frac{ln(b \cdot x)}{ln(a)} = \frac{1}{ln(a)} \cdot ln(b \cdot x)$$

In diesem Ausdruck ist $\frac{1}{ln(a)}$ ein Faktor, der nach der Faktorregel erhalten bleibt und $ln(b \cdot x)$ wird mithilfe der Kettenregel abgeleitet zu $\frac{b}{b \cdot x} = \frac{1}{x}$, somit ist

$$f'(x) = \frac{1}{ln(a) \cdot x} \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Lösung A2

$f(x) = \log_a(b \cdot x^c)$

Um die Ableitung zu bewerkstelligen, wenden wir zunächst einmal die Logarithmengesetze an, denn $\log_a(b \cdot x^c) = c \cdot \log_a(b \cdot x)$. (Ein Logarithmus holt den Exponenten nach vorne).

Weiterhin ist $c \cdot \log_a(b \cdot x) = c \cdot \frac{\ln(b \cdot x)}{\ln(a)} = \frac{c}{\ln(a)} \cdot \ln(b \cdot x)$ mit $\frac{c}{ln(a)}$ als Faktor, der nach der Faktorregel erhalten bleibt.

Gemäß Aufgabe 1 ist ist die Ableitung von $ln(b \cdot x)$ gleich $\frac{1}{x}$, sodass gilt:

$$f'(x) = \frac{c}{ln(a) \cdot x} \qquad \textbf{q.e.d.}$$