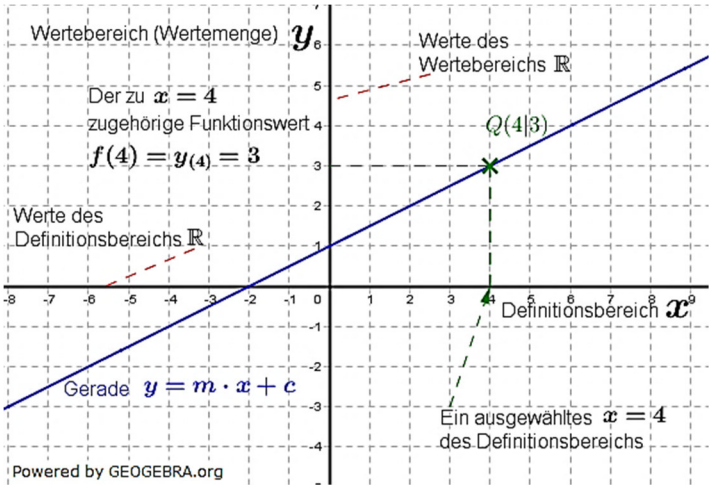
## Definition des Begriffs „Funktion"

In der Mathematik ist eine **Funktion** (lateinisch *functio*) oder **Abbildung** eine Beziehung (Relation) zwischen zwei Mengen, die jedem Element der Definitionsmenge (Funktionsargument, unabhängige Variable, *x*-Wert) ***genau ein und nur ein*** Element der Wertemenge (Funktionswert, abhängige Variable, *y*-Wert) zuordnet.

## Die lineare Funktion

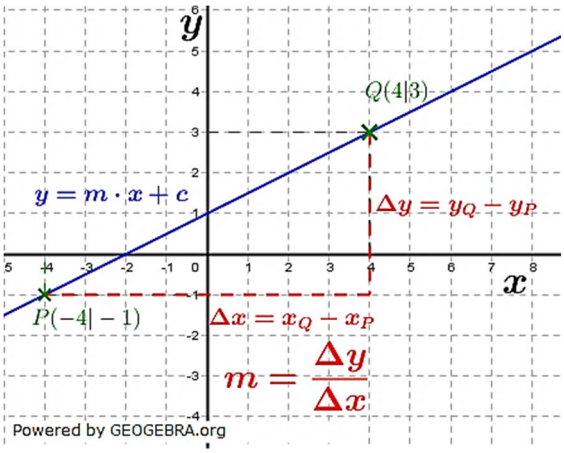
Den angeführten Definitionsbegriff einer Funktion verdeutlicht die nebenstehende Graphik. Jedem einzelnen *x* ist durch die Funktionsvorschrift $y = m \cdot x + c$ genau ein und nur ein *y*-Wert zugeordnet.




In der allgemeinen Geradengleichung $g(x) = y = m \cdot x + c$ haben die Variablen $m$ und $c$ die nachfolgende Bedeutung:
$m$ steht für die „Steigung" der Geraden.
$c$ steht für den „$y$-Achsenabschnitt" der Geraden.

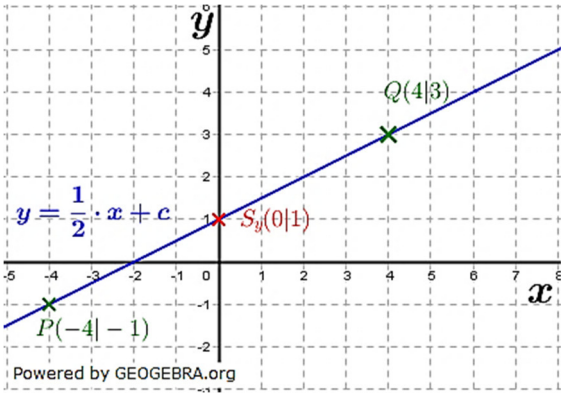
## Die Steigung $m$ einer linearen Funktion

Die Steigung $m$ einer linearen Funktion lässt sich berechnen, wenn die Koordinaten zweier Punkte, durch die die lineare Funktion verläuft, bekannt sind.
Sie wird berechnet über den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
In nebenstehender Graphik sind die beiden Punkte $P(-4|-1)$ und $Q(4|3)$ bekannt.
$\Delta y$ ergibt sich aus $y_Q - y_P = 3 - (-1) = 4$.
$\Delta x$ ergibt sich aus $x_Q - x_P = 4 - (-4) = 8$.
Somit ergibt sich $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
Die Funktionsgleichung lautet somit $y = \frac{1}{2}x + c$. Es fehlt noch die Bestimmung von $c$.



## Die $y$-Achsenabschnitt $c$ einer linearen Funktion

Unter dem $y$-Achsenabschnitt einer linearen Funktion verstehen wir den Schnittpunkt des Graphen der linearen Funktion mit der $y$-Achse. In nebenstehender Graphik ist dieser Punkt $S_y$ benannt.




Der Wert von $c$ kann rechnerisch ermittelt werden, nachdem die Steigung $m$ bekannt ist. Wir machen mit einem der beiden Punkte $P$ bzw. $Q$ eine Punktprobe und errechnen daraus den Wert von $c$. Welchen Punkt wir dabei auswählen, ist egal.
Wir führen die Rechnung mit dem Punkt $Q(4|3)$ durch:

$3 = \frac{1}{2} \cdot 4 + c \qquad | \quad -2$

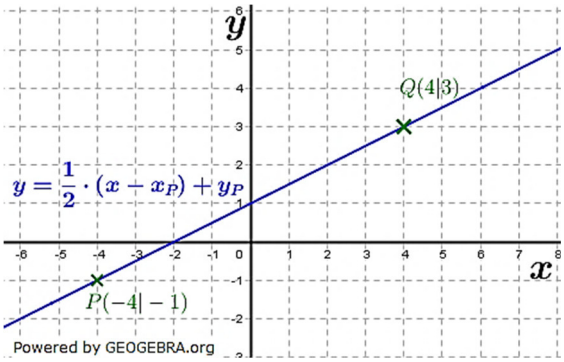
$c = 3 - 2 = 1$

Damit lautet die endgültige Funktionsgleichung des Beispiels

$$f(x) = y = \frac{1}{2}x + 1$$

## Die Punkt-Steigungsform einer linearen Funktion

Neben der allgemeinen Funktionsgleichung einer linearen Funktion $f(x) = y = m \cdot x + c$ existieren noch weitere Gleichungsarten. Eine dieser weiteren Gleichungsarten ist die Punkt-Steigungsformel mit
$f(x) = y = m \cdot (x - x_P) + y_P$.



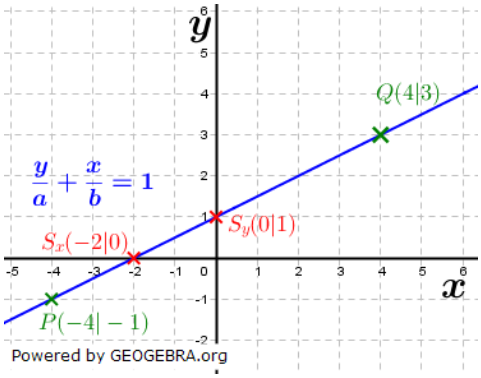

Hierin sind $x_P$ und $y_P$ die Koordinaten eines bekannten Punktes der Geraden.
Neben dem bekannten Punkt muss auch noch die Steigung der Geraden bekannt sein, damit die Punkt-Steigungsformel aufgestellt werden kann.
Wir stellen die Gleichung auf mit der Steigung $m = \frac{1}{2}$ und dem Punkt $P(-4|-1)$.

$f(x) = y = \frac{1}{2} \cdot \big(x - (-4)\big) - 1$

$f(x) = y = \frac{1}{2}x + 2 - 1 = \frac{1}{2}x + 1$

## Achsenabschnittsform einer linearen Funktionsgleichung

Eine weitere Gleichungsart ist die Achsenabschnittsform mit
$\frac{y}{a}+\frac{x}{b}=1.$
Hierin ist $a$ die $y$-Koordinate des Schnittpunktes der Geraden mit der $y$-Achse und $b$ die $x$-Koordinate des Schnittpunktes der Geraden mit der $x$-Achse.

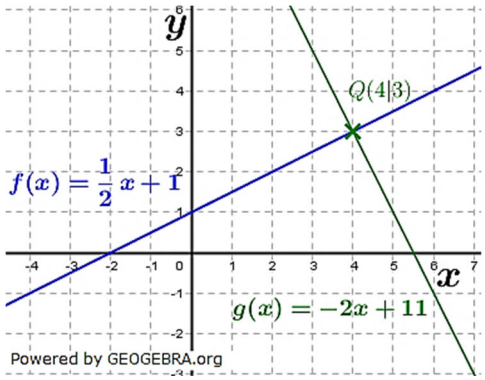



Wir stellen die Funktionsgleichung auf mit $a=1$ und $b=-2$ (Siehe Graphik).

$\frac{y}{1}-\frac{x}{2}=1$ | $\cdot 2$
$2y-x=2$ | $+x;\ :2$
$y=\frac{1}{2}x+1$

## Orthogonalität zweier Geraden

Stehen zwei Geraden $f$ und $g$ senkrecht aufeinander, so gilt die Beziehung
$m_f \cdot m_g=-1.$
Hierin sind $m_f$ und $m_g$ die Steigungen der beiden Geraden.




Wir stellen die Funktionsgleichung einer Geraden $g$ auf, die orthogonal zur Geraden $f$ mit $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ ist und zusätzlich durch den Punkt $Q(4|3)$ geht.

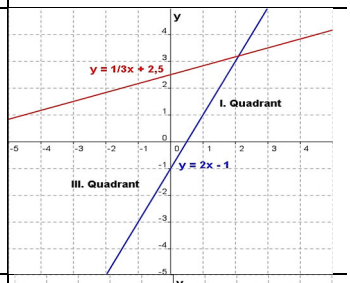
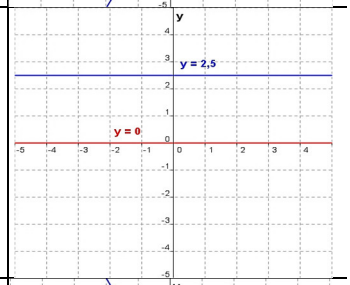
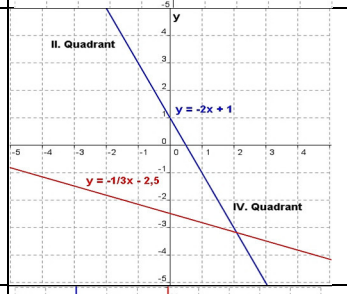
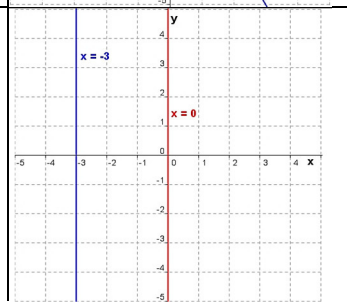
$m_f=\frac{1}{2}$
$m_g=-\frac{1}{m_f}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$
$g(x)=m_g\cdot(x-x_Q)+y_Q$ | Punkt-Steigungsformel
$g(x)=-2\cdot(x-4)+3$
$g(x)=y_g=-2x+11$

## Auffrischung Mittelstufenwissen

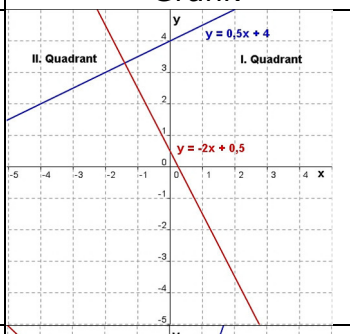
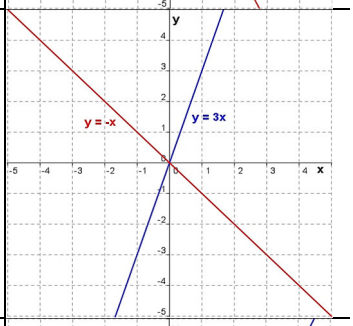
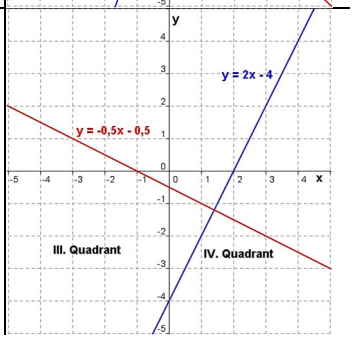
Graphen linearer Funktionen haben einen eigenen Namen – Gerade. Die allgemeine Funktionsgleichung lautet

$$f(x) = m \cdot x + c$$

Der Parameter $m \in \mathbb{R}$ bestimmt die Steigung der Geraden. Es gilt:

| Wert von $m$ | Auswirkung | Grafik |
|---|---|---|
| $m > 0$ | Gerade mit positiver Steigung verläuft vom III. Quadranten in den I. Quadranten. |  |
| $m = 0$ | Beschreibt eine Parallele zur $x$–Achse, falls zusätzlich $c = 0$, die $x$–Achse selbst. |  |
| $m < 0$ | Gerade mit negativer Steigung verläuft vom II. Quadranten in den IV. Quadranten. |  |
| $x = c$ | Beschreibt eine Parallele zur $y$–Achse im Abstand $c$, falls zusätzlich $c = 0$, die $y$–Achse selbst. |  |

Der Parameter $c \in \mathbb{R}$ bestimmt den $y$-Achsenabschnitt. Es gilt:

| Wert von $c$ | Auswirkung | Grafik |
|---|---|---|
| $c > 0$ | Die Gerade schneidet die $y$–Achse bei $c$ zwischen dem II. und I. Quadranten. |   |
| $c = 0$ | Die Gerade schneidet die $y$–Achse im Ursprung. Eine solche Gerade heißt Ursprungsgerade. |   |
| $c < 0$ | Die Gerade schneidet die $y$–Achse bei $c$ zwischen dem III. und IV. Quadranten. |   |

## Erweitertes Wissen lineare Funktionen

Zum erweiterten Wissen zu linearen Funktionen gehören die Themenkreise

- Besondere Lage von Geraden;
- Länge einer Strecke zwischen zwei Geradenpunkten;
- Schnittwinkel einer Geraden mit der x-Achse;
- Schnittwinkel zwischen zwei Geraden.

Nachfolgend werden die einzelnen Themenkreise behandelt.

## Besondere Lage von Geraden

Beispiel 1: Gegeben sind die Geraden $g$ mit $y = 0{,}5(x+3)$ und $h$ mit $y = 0{,}5x - 1$. Mache eine Aussage über die gegenseitige Lage der Geraden $g$ und $h$.

Lösung 1: Nach Auflösung der Klammer $0{,}5(x+3)$ stellen wir fest, dass sowohl $g$ als auch $h$ die gleiche Steigung haben. Beide Geraden haben aber einen unterschiedlichen $y$–Achsenabschnitt mit $c_g = 1{,}5$ und $c_h = -1$. Die beiden Geraden verlaufen somit parallel zu einander und haben keine gemeinsamen Punkte.

Beispiel 2: Gegeben ist die Gerade $g$ mit $y = 2x - 1$ . Eine Gerade $h$ schneidet die Gerade $g$ senkrecht. Bestimmen die Steigung von $h$.

Lösung 2: Wenn zwei Geraden (oder auch sonstige Kurven) senkrecht aufeinander stehen, so schließen sie einen Winkel von $90°$ ein. Die Gerade, die auf einer anderen Geraden senkrecht steht, trägt auch den Namen Orthogonale. Für eine Orthogonale gilt $m_g = -\frac{1}{m_h}$ bzw. $m_h = -\frac{1}{m_g}$.

$m_h = -\frac{1}{2} = -0{,}5$. Die Steigung der Geraden $h$ beträgt $-0{,}5$.

Beispiel 3: Gegeben sind die Geraden $g$ mit $y = 0{,}3(x + 4)$ und $h$ mit $y = \frac{3}{10}x + 1{,}2$. Mache eine Aussage über die gegenseitige Lage der Geraden $g$ und $h$.

Lösung 3: Nach Auflösung der Klammer $0{,}3(x + 4)$ stellen wir fest, dass sowohl $g$ als auch $h$ die gleiche Steigung haben. Beide Geraden haben zusätzlich noch denselben $y$–Achsenabschnitt mit $c_g = c_h = 1{,}2$. Die beiden Geraden liegen somit auf sich selbst und haben unendlich viele gemeinsame Punkte.

Die Lösungsergebnisse führen uns zu folgendem

## Merksatz besondere Lage von Geraden

*Haben zwei Geraden $g$ und $h$ die gleiche Steigung $m$ und einen unterschiedlichen $y$–Achsenabschnitt $c$, so liegen sie parallel zueinander.*

*Haben zwei Geraden $g$ und $h$ die gleiche Steigung $m$ und denselben $y$–Achsenabschnitt $c$, so liegen sie aufeinander.*

*Ist das Produkt der Steigungen zweier Geraden $g$ und $h$ gleich $-1$, so stehen sie aufeinander senkrecht. ($m_g \cdot m_h = -1$).*

## Länge einer Strecke

Unter der Länge einer Strecke z. B. $\overline{AB}$ verstehen wir den linearen Abstand zwischen zwei Punkten $A$ und $B$, Länge der Strecke in $LE$ (= Längeneinheit).

Beispiel 4: Gegeben sind die Punkte $A(-2|2)$, $B(2|-1)$ und $C(1|4)$.

a) Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$.
b) Bestimme den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$.
c) Beschreibe die Strecke $\overline{AC}$ mit einer Gleichung.
d) $A$, $B$ und $C$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Zeichne das Dreieck in ein Koordinatensystem ein. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung 4:

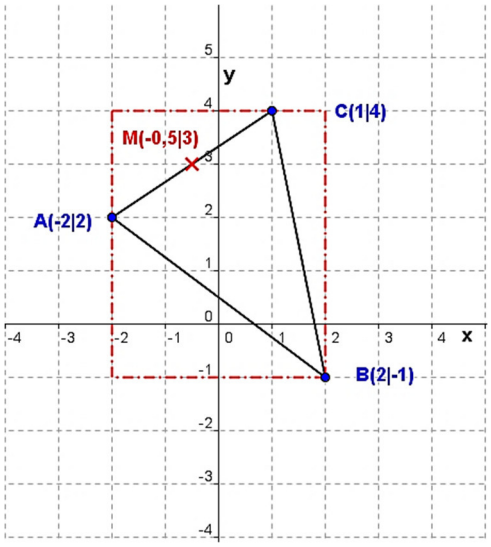
zu a) Wir wählen $B(x_2|y_2)$ und $A(x_1|y_1)$. Der Abstand einer Strecke ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras mit $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

$d = \sqrt{(2 - (-2))^2 + ((-1) - 2)^2}$

$d = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$

$d = 5\ LE$

zu b) Wir wählen $A(x_1|y_1)$ und $C(x_2|y_2)$.
Der Mittelpunkt einer Strecke ergibt sich aus $x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$ und $y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$.
$x_M = \frac{-2+1}{2} = -0{,}5 \quad y_M = \frac{2+4}{2} = 3$
Die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke $\overline{AC}$ lauten $M(-0{,}5|3)$.




zu c) Über die Punktsteigungsformel
$y = m(x - x_A) + y_A$ erhalten wir
$y = \frac{2}{3}(x+2) + 2$
$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$

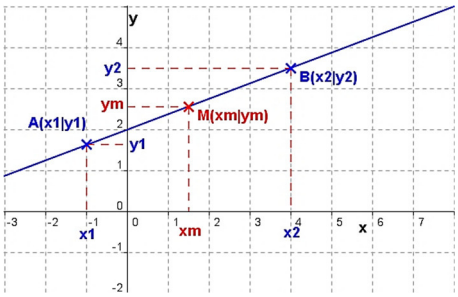
zu d) Die Fläche des Dreiecks $ABC$ bestimmt sich aus der Fläche des (rot umrandeten) Rechtecks abzüglich der 3 äußeren Dreiecke über den Seiten des inneren Dreiecks.
$A_{Rechteck} = 4 \cdot 5 = 20\ FE$
$A_{Dreieck\ddot{u}ber\overline{AB}} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\ FE$
$A_{Dreieck\ddot{u}ber\overline{AC}} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3\ FE$
$A_{Dreieck\ddot{u}ber\overline{CB}} = \frac{1 \cdot 5}{2} = 2{,}5\ FE$
$A_{ABC} = 20 - 6 - 3 - 2{,}5 = 8{,}5\ FE$

Die Lösungsergebnisse führen uns zu folgendem

## Merksatz Länge von Strecken

Die Länge einer Strecke $\overline{AB}$ ***mit*** $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ errechnet sich über:
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Der Mittelpunkt $M(x_m|y_m)$ einer Strecke $\overline{AB}$ mit $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ errechnet sich über:
$x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$ *und* $y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$




## Schnittwinkel einer Geraden mit der *x*-Achse

Wir unterscheiden zwei Arten von Winkeln bei Geraden, dem Steigungswinkel und dem Schnittwinkel.

Beispiel 5: $K_f$ ist das Schaubild der Funktion $f$ mit $f(x) = \frac{1}{2}x - 1;\ x \in \mathbb{R}$. Unter welchem Winkel schneidet $f$ die $x$-Achse?

Lösung 5: Aus $x = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha)$ folgt für den gesuchten Winkel:
$tan(\alpha) = 0{,}5 \quad => \quad a = arctan(0{,}5) = 26{,}57°$
Hinweis: Zur korrekten Ermittlung des Winkels in **°** muss der Modus des GTR/WTR auf **GRAD** eingestellt sein (Gegebenenfalls Änderung im Menu **MODE** durchführen).

Beispiel 6: $K_f$ ist das Schaubild der Funktion $f$ mit $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1;\ x \in \mathbb{R}$. Unter welchem Winkel schneidet $f$ die $x$-Achse?

Lösung 5: $tan(\alpha) = -\frac{1}{3}\ \ => \ \ a = arctan\left(-\frac{1}{3}\right) = -18{,}43°$

$180° - 18{,}43° = 161{,}57°$

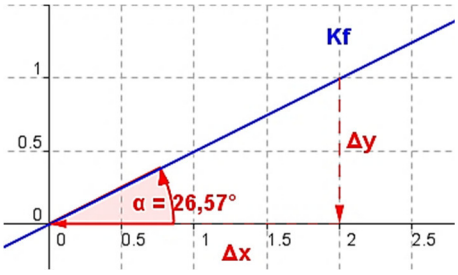
<u>Hinweis:</u> Bei negativen Steigungen zeigt der GTR/WTR einen negativen Winkel an. Im Beispiel den Wert $-18{,}43°$. Dies ist der Winkel, den die $x$–Achse im Uhrzeigersinn gesehen mit der Gerade $K_f$ einschließt. Um den Schnittwinkel, den die $x$–Achse gegen den Uhrzeigersinn gesehen mit der Geraden $K_f$ einschließt, muss der Betrag des GTR/WTR-Wertes von $180°$ abgezogen werden.

Die Lösungsergebnisse führen uns zu folgendem

## Merksatz Schnittwinkel mit der x-Achse

*Unter dem Steigungswinkel $\alpha$ einer Geraden $g$ verstehen wir den Winkel zwischen $0°$ und $180°$, den die Gerade $g$ mit der $x$–Achse gegen den Uhrzeigersinn gesehen bildet.*

$\alpha = \sphericalangle(x - Achse; g)$




## Schnittwinkel zweier Geraden

Zwei nicht parallele Geraden und schneiden sich unter einem Winkel. Als Schnittwinkel ist dabei der spitze Winkel definiert, den die beiden Geraden einschließen.

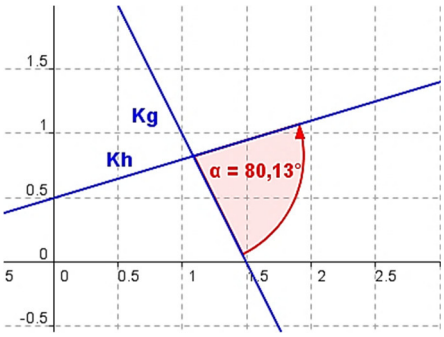
Beispiel 7: Gegeben sind die Geraden $g: y = -2x + 3$ und $h: y = 0{,}3x + 0{,}5$. Bestimme den Schnittwinkel den die Geraden $g$ und $h$ einschließen.

Lösung 7: Die Geraden $K_g$ und $K_h$ schließen zwei Winkel ein. Den kleineren der beiden Winkel, der zwischen $0°$ und $90°$ liegt, bezeichnen wir mit **Schnittwinkel** von $K_g$ und $K_h$.

$tan(\alpha) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$

$tan(\alpha) = \left|\frac{-2 - 0{,}3}{1 + (-2) \cdot 0{,}3}\right| = 5{,}75$

$\alpha = arctan(5{,}75) = 80{,}13°$



Das Lösungsergebnis führt uns zu folgendem

## Merksatz Schnittwinkel zweier Geraden

*Der Schnittwinkel zwischen zwei Geraden $g$ und $h$ ist immer der Winkel, der zwischen $0°$ und $90°$ liegt. Die Formel zur Berechnung des Schnittwinkels lautet $\alpha = arctan\left(\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1 \cdot m_2}\right|\right)$. Dabei ist es unerheblich, welche der beiden Steigungen mit $m_1$ und $m_2$ gewählt wird. Wichtig für die korrekte Berechnung ist das Einhalten der Betragszeichen | |.*

## Lineare Funktionen der Anwendungsorientierung

Viele Themen des Alltags lassen sich über lineare Funktionen mathematisch beschreiben, wie etwa die Strom- und Wasserrechnung eines Energielieferanten, die Handyrechnung des Mobilfunkanbieters, aber auch Angebotskalkulation, Nachfrageermittlung und Marktgleichgewichtsrechnungen. Wir machen uns das an zwei Beispielen klar.

Beispiel 8: Ein Energieversorger bietet seinen Kunden Stromlieferung zu folgenden Bedingungen an:
Eine *kWh* kostet *0,14 €* bei einer monatlichen Grundgebühr von *7,50 €*.

a) Erstelle einen Funktionsterm ($y$ € für $x\ kWh$). Stelle die Funktion in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

b) Die Stromrechnung für *4* Monate beläuft sich auf *150,40 €*. Wie hoch war der Stromverbrauch in *kWh*?

c) Eine Kaufhauskette verkauft Strom für *0,10 €* pro *kWh* bei einer monatlichen Grundgebühr von *10 €*. Ab welcher monatlichen Verbrauchsmenge lohnt sich ein Wechsel des Stromanbieters?

Lösung 8:

zu a) Die unabhängige Variable $x$ beschreibt die Anzahl der verbrauchten *kWh*. $y = f(x)$ sind die monatlichen Stromkosten in Abhängigkeit vom Verbrauch, zu denen noch die verbrauchsunabhängige Grundgebühr pro Monat hinzukommt.
Funktionsterm: $f(x) = 0{,}14x + 7{,}50$.

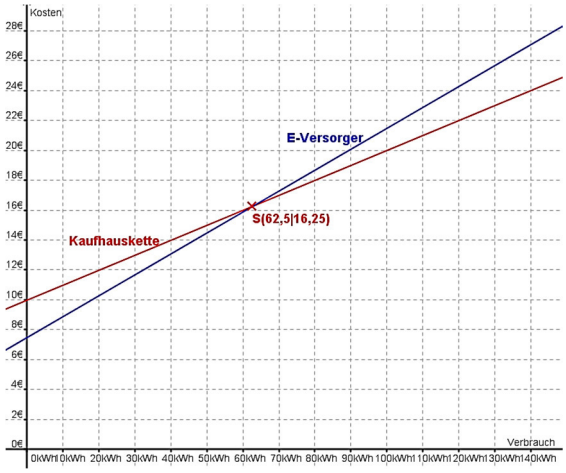
zu b) $f(x) = 150{,}40$ in 4 Monaten.

$150{,}40 = 0{,}14x + 4 \cdot 7{,}50 \quad \Rightarrow \quad x = 860$

Der Stromverbrauch in *4* Monaten betrug $860\ kWh$.

zu c) Der Funktionsterm für das Angebot der Kaufhauskette lautet $h(x) = 0{,}10x + 10$.

Der „Break-Even Point" ist der Schnittpunkt der beiden Kostenfunktionen.
$f(x) = g(x)$
$0{,}14x + 7{,}50 = 0.1x + 10$
$x = 62{,}5$
Ab einem monatlichen Verbrauch von $62{,}5\ kWh$ lohnt sich der Wechsel des Stromanbieters.




Beispiel 9: Gegeben sind die Angebotsfunktion mit $p_A(x) = 0{,}5x + 4$ und die Nachfragefunktion mit $p_N(x) = 12 - 1{,}5x; 1 \leq x \leq 5{,}5$.
Bestimme Gleichgewichtsmenge und Gleichgewichtspreis.

Lösung 9: Gleichsetzen von $p_A(x) = p_N(x)$

$0{,}5x + 4 = 12 - 1{,}5x \quad \Rightarrow \quad x = 4$

Gleichgewichtsmenge $x_G = 4 \quad \Rightarrow \quad p_A(4) = 6$
Gleichgewichtspreis $\quad p_G = 6$
Marktgleichgewicht: $M_G(4|6)$