Funktionsklassen Quadratische Funktionen (Parabeln)

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de
© by Fit-in-Mathe-Online.de

Inhaltsverzeichnis

Quadratische Funktionen (Parabeln)

© by Fit-in-Mathe-Online.de

Kapitel mit 375 Aufgaben

	Seite
WIKI Regeln und Formeln	03
Level 1 Grundlagen	
Aufgabenblatt 1 *(38 Aufgaben)*	23
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	24
Aufgabenblatt 2 *(34 Aufgaben)*	28
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	30
Aufgabenblatt 3 *(38 Aufgaben)*	33
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	35
Aufgabenblatt 4 *(38 Aufgaben)*	40
Lösungen zum Aufgabenblatt 4	42
Aufgabenblatt 5 *(40 Aufgaben)*	51
Lösungen zum Aufgabenblatt 4	54
Level 2 Fortgeschritten	
Aufgabenblatt 1 *(26 Aufgaben)*	57
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	59
Aufgabenblatt 2 *(26 Aufgaben)*	67
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	69
Aufgabenblatt 3 *(25 Aufgaben)*	76
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	77
Aufgabenblatt 4 *(34 Aufgaben)*	83
Lösungen zum Aufgabenblatt 4	85
Level 3 Expert	
Aufgabenblatt 1 *(14 Aufgaben)*	91
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	93
Aufgabenblatt 2 *(9 Aufgaben)*	98
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	100
Aufgabenblatt 3 *(14 Aufgaben)*	104
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	106
Aufgabenblatt 4 *(17 Aufgaben)*	109
Lösungen zum Aufgabenblatt 4	111
Aufgabenblatt 5 *(22 Aufgaben)*	115
Lösungen zum Aufgabenblatt 5	117

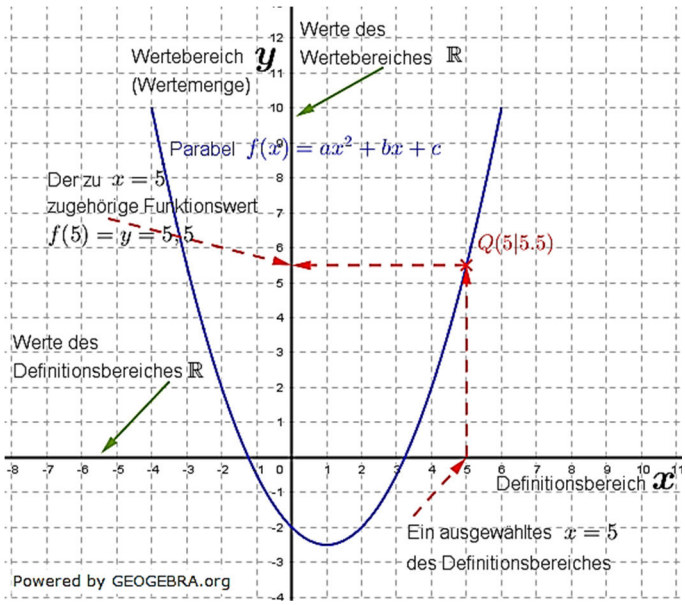
© ***by Fit-in-Mathe-Online,*** mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de
© by Fit-in-Mathe-Online.de

Definition des Begriffs „Funktion"

In der Mathematik ist eine **Funktion** (lateinisch *functio*) oder **Abbildung** eine Beziehung (Relation) zwischen zwei Mengen, die jedem Element der Definitionsmenge (Funktionsargument, unabhängige Variable, *x*-Wert) ***genau ein und nur ein*** Element der Wertemenge (Funktionswert, abhängige Variable, *y*-Wert) zuordnet.

Die quadratische Funktion (Parabel)

Den angeführten Definitionsbegriff einer Funktion verdeutlicht die nebenstehende Graphik.
Jedem einzelnen *x* ist durch die Funktionsvorschrift $y = ax^2 + bx + c$ genau ein und nur ein *y*-Wert zugeordnet.



Auffrischung Mittelstufenwissen

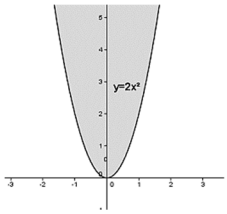
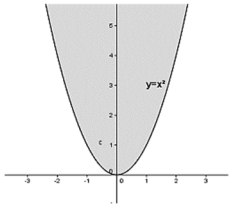
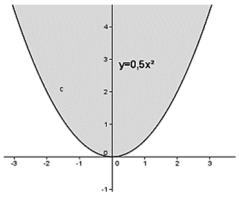
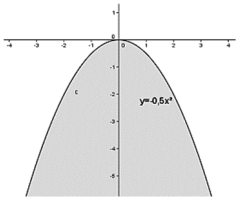
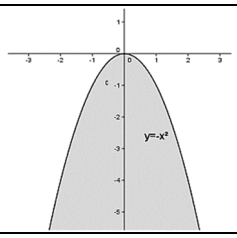
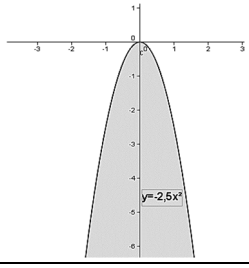
Die allgemeinen Form einer quadratischen Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Die Variablen a, b und c haben dabei die nachfolgend näher beschriebene Bedeutung:

Bedeutung des Parameters a

Der Parameter $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ bestimmt die Öffnung (Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung) der Parabel. Es gilt:

Wert von $\boldsymbol{a}$	Auswirkung	Grafik
$\boldsymbol{a > 1}$	Nach oben geöffnete, gestreckte Parabel	
$\boldsymbol{a = 1}$	Nach oben geöffnete Normalparabel	
$\boldsymbol{0 < a < 1}$	Nach oben geöffnete, gestauchte Parabel	
$\boldsymbol{-1 < a < 0}$	Nach unten geöffnete, gestauchte Parabel	
$\boldsymbol{a = -1}$	Nach unten geöffnete Normalparabel	
$\boldsymbol{a < -1}$	Nach unten geöffnete, gestreckte Parabel	

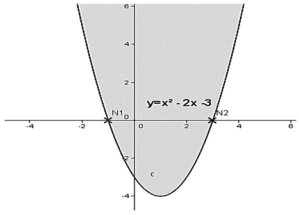
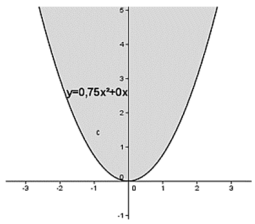
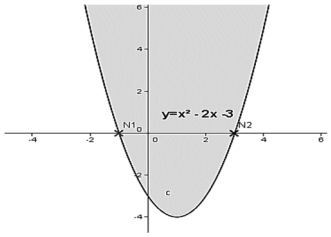
Bedeutung des Parameters b

Der Parameter $b \in \mathbb{R}$ bestimmt eine Verschiebung der Parabel in x-Richtung.
Zur Feststellung der Verschiebungsweite muss die allgemeine Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ in die Scheitelpunktgleichung $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ überführt werden, wobei x_s und y_s die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(x_s|y_s)$ sind.
Die Gleichungsumstellung erfolgt über die quadratische Ergänzung mit

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

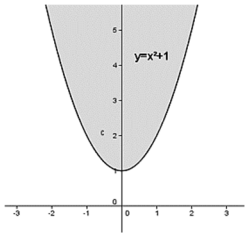
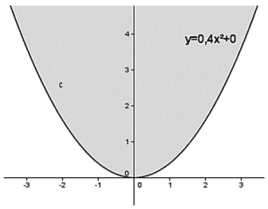
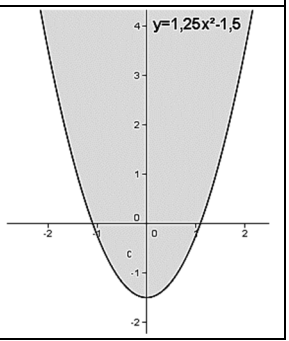
Mit $x_s = -\frac{b}{2a}$ und $y_s = c - \frac{b^2}{4a^2}$ kann der Scheitel jedoch jederzeit auch ohne Formelumstellung ermittelt werden.

Der Wert von x_S bestimmt die Verschiebung der Parabel in x-Richtung. Es gilt:

Wert von x_S	Auswirkung	Grafik
$x_S > 0$	Die Parabel ist in x-Richtung nach **rechts** verschoben.	
$x_S = 0$	Die Parabel ist in x-Richtung **nicht** verschoben.	
$x_S < 0$	Die Parabel ist in x-Richtung nach **rechts** verschoben.	

Bedeutung des Parameters c

Der Parameter $c \in \mathbb{R}$ bestimmt die Verschiebung der Parabel in y-Richtung. Es gilt:

Wert von c	Auswirkung	
$c > 0$	Die Parabel ist in y-Richtung nach **oben** verschoben.	
$c = 0$	Die Parabel ist in y-Richtung **nicht** verschoben.	
$c < 0$	Die Parabel ist in y-Richtung nach **unten** verschoben	

Beispiele

Beispiel 1: Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = x^2 - 4x + 1$ und g mit $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$. Stelle für jede Funktion die Werte der Koeffizienten a, b und c fest und mache eine Aussage über die Lage der beiden Parabeln.

Lösung 1: Funktion f:
$a = 1;\ b = -4;\ c = 1$
Es ist eine in x-Richtung verschobene nach oben geöffnete Normalparabel, die die y-Achse in $S_y(0|1)$ schneidet.
Funktion g:
$a = -\frac{1}{2};\ b = -1;\ c = \frac{3}{2}$
Es ist eine in x-Richtung verschobene, nach unten geöffnete, mit dem Faktor $k = |a| = \frac{1}{2}$ gestreckte Parabel, die die y-Achse in $S_y\left(0\left|\frac{3}{2}\right.\right)$ schneidet.

Beispiel 2: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Bestimme für die Funktion den Verschiebungsfaktor in x– und y-Richtung gegenüber der Funktion h mit $h(x) = x^2$ sowie den Scheitelpunkt.

Lösung 2: Funktion f: $f(x) = x^2 - 4x + 1$

Lösungsmöglichkeit 1:

Formelumstellung in die Scheitelpunktform über die quadratische Ergänzung.

$x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 4 + 1 = (x-2)^2 - 3$

Der Scheitelpunkt lautet $S(2|-3)$.

Lösungsmöglichkeit 2:

Ermitteln des Scheitels über die Formeln.

$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$

$y_s = c - \frac{b^2}{4a} = 1 - \frac{(-4)^2}{4 \cdot 1} = 1 - 4 = -3$

Der Scheitelpunkt lautet $S(2|-3)$

Lösungsmöglichkeit 3:

Ermitteln der x-Koordinate des Scheitels über die Nullstellen und die Symmetrie.

$x^2 - 4x + 1 = 0$

$x_{12} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$

Da die Symmetrieachse zwischen den beiden Nullstellen in der Mitte liegt, ist $x_S = 2$.

$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$

Der Scheitelpunkt lautet $S(2|-3)$

f ist gegenüber h mit $h(x) = x^2$ in x-Richtung um 2 Stellen nach rechts und in y-Richtung um 3 Stellen nach unten verschoben.

Beispiel 3: Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$.
Bestimme für die Funktion den Verschiebungsfaktor in x– und y-Richtung gegenüber der Funktion h mit $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$, sowie den Scheitelpunkt S.

Lösung 3: Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$

Lösungsmöglichkeit 1:

Formelumstellung in die Scheitelpunktform über die quadratische Ergänzung.

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \quad | \quad \cdot(-2)$

$-2 \cdot f(x) = x^2 + 2x - 3$

$-2 \cdot f(x) = (x+1)^2 - 1 - 3 \quad | \quad :(-2)$

$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+1)^2 + 2$

Der Scheitelpunkt lautet $S(-1|2)$.

Lösungsmöglichkeit 2:

Ermitteln des Scheitels über die Formeln.

$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -1$

$y_s = c - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{3}{2} - \frac{(-1)^2}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

Der Scheitelpunkt lautet $S(2|-3)$

Lösungsmöglichkeit 3:
Ermitteln der x-Koordinate des Scheitels über die Nullstellen und die Symmetrie.

$-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0 \qquad | \qquad \cdot(-2)$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$x_{12} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm \sqrt{4}$

Da die Symmetrieachse zwischen den beiden Nullstellen in der Mitte liegt, ist $x_S = -1$.

$f(-1) = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - (-1) + \frac{3}{2} = 2$

Der Scheitelpunkt lautet $S(-1|2)$

f ist gegenüber h mit $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$ in x-Richtung um 1 Stelle nach links und in y-Richtung um 2 Stellen nach oben verschoben.

Erweitertes Wissen quadratischer Funktionen

Zum erweiterten Wissen über die quadratischen Funktionen gehören die Themenkreise

- Scheitelform;
- Symmetrie- und Globalverhalten;
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen;
- Schnittpunkte zweier Parabeln;
- Aufstellung von Funktionsgleichungen;
- Anwendungsorientierte Themen;
- Quadratische Funktionen mit Parameter.

Nachfolgend werden die einzelnen Themenkreise behandelt.

Scheitelform

Eine quadratische Funktionsgleichung hat – je nachdem ob sie nach oben oder nach unten geöffnet ist – einen tiefsten bzw. einen höchsten Punkt. Diesen Punkt nennen wir den Scheitelpunkt (Scheitel) einer Parabel.
Die Funktionsgleichung einer Parabel kann auch über die Scheitelform dargestellt werden mit

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s,$$

mit a als Streckungsfaktor in y-Richtung und $S(x_s|y_s)$ dem Scheitelpunkt und seinen Koordinaten x_s und y_s.

Dabei kann die Hauptform $f(x) = ax^2 + bx + c$ jederzeit aus der Scheitelform hergeleitet werden durch Auflösung der binomischen Formel $(x - x_s)^2$. Auf die Auflösung binomischer Formeln wird hier nicht mehr näher eingegangen, siehe hierzu den Portalteil „Binomische Formeln".

Umgekehrt kann die Scheitelform jederzeit aus der Hauptform hergeleitet werden. Hierzu bedienen wir uns der quadratischen Ergänzung, deren Herleitung kurz wiederholt werden soll. Ausführliche Erläuterungen hierzu findest du ebenfalls im Portalteil „Binomische Formeln".

Herleitung der Scheitelform aus der Hauptform

Ausgehend von der Hauptform $f(x) = ax^2 + bx + c$ bilden wir zunächst für das Gleichungsglied $ax^2 + bx$ die quadratische Ergänzung zur Umformung des Gliedes in eine binomische Formel. Hierzu formen wir um:

$ax^2 + bx$ | Ausklammern von a

$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$

Nun können wir ja aus $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$ nicht einfach $a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ machen, denn, wenn wir diese binomische Formel nach den binomischen Regeln wieder auflösen, erhalten wir: $a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right)$. Zwar entsprechen die ersten beiden Glieder $x^2 + \frac{b}{a}x$ ja wieder den beiden Gliedern in der Klammer unserer Ausgangssituation $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$, allerdings ist jetzt wohl das $+\frac{b^2}{4a^2}$ zu viel. Um dennoch weiterzukommen, ziehen wir also dieses $+\frac{b^2}{4a^2}$ mit $-\frac{b^2}{4a^2}$ wieder ab, erhalten also:

$a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$, was zweifelsohne dem Ausdruck $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$ entspricht.

Aus den ersten drei Gliedern $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ in der Klammer lässt sich nun aber eine binomische Formel bilden, sodass wir $a \cdot \left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right)$ erhalten. Wenn wir jetzt diesen Ausdruck wieder ausmultiplizieren, erhalten wir

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$.

Somit haben wir $ax^2 + bx$ ungeformt in $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$.Wir setzen diesen Ausdruck in $f(x)$ ein und erhalten die endgültigen Scheitelform $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$.

Und da die Scheitelform ja auch lautet $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$, ist somit

$$x_s = -\frac{b}{2a}; \quad y_s = -\frac{b^2}{4a} + c$$

Wie du siehst, ist dies ein sehr aufwendiges Verfahren. Wie man das einfacher machen kann, erfährst du nachfolgend.

Gegeben sei die Parabelgleichung

$$f(x) = 3x^2 + 12x + 10,$$

die Faktoren sind $a = 3$, $b = 12$ sowie $c = 12$. Unter Verwendung der beiden o. a. Formeln erhalten wir $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot 3} = -2$ und $y_S = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{144}{4 \cdot 3} + 10 = -2$.

Zur manuellen Umrechnung gehen wir wie folgt vor:

Vorbereitender Schritt (nicht erforderlich bei $a = 1$):

$f(x) = 3x^2 + 12x + 10$ | $:3$ Herstellung Koeffizient 1 von a.

$\frac{1}{3} \cdot f(x) = x^2 + 4x + \frac{10}{3}$

Nun können wir mit der rechten Seite der Gleichung die Scheitelform mit 7 einfachen Schritten erstellen:

Der Ausdruck lautet $x^2 + 4x + \frac{10}{3}$

1. Schritt: $(x$
2. Schritt: $(x +$
3. Schritt: $:2$

$(x + 2$

4. Schritt: $(x + 2)^2 -$
5. Schritt:

2^2

$(x + 2)^2 - 4$

6. Schritt: $(x + 2)^2 - 4 + \frac{10}{3}$
7. Schritt: $(x+2)^2 - \frac{2}{3}$

Auf der linken Seite der Gleichung steht aber nicht mehr $f(x)$, sondern $\frac{1}{3} \cdot f(x)$.

$\frac{1}{3}f(x) = (x+2)^2 - \frac{2}{3}$. Gut, dann multiplizieren wir die Gleichung wieder mit 3 und erhalten

$f(x) = 3(x+2)^2 - 2$

Die Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = 3x^2 + 12x + 10$ hat den Scheitel $S(-2|-2)$.

Beispiel 4: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^2 + 8x + 12$. Bestimme den Scheitel und gib den Funktionsterm in der Scheitelform an.

Lösung 4: Wir stellen zunächst die Funktionsgleichung von f um in die Scheitelpunktgleichung.

$f(x) = 2x^2 + 8x + 12 \quad | \quad :2$

$\frac{1}{2}f(x) = x^2 + 4x + 6$

$\frac{1}{2}f(x) = (x+2)^2 - 4 + 6$

$\frac{1}{2}f(x) = (x+2)^2 + 2 \quad | \quad \cdot 2$

Somit lautet die Scheitelform

$f(x) = 2(x+2)^2 + 4$

Die Parabel hat den Scheitelpunkt $S(-2|4)$.

Alternativ:

$a = 2;\ b = 8;\ c = 12$

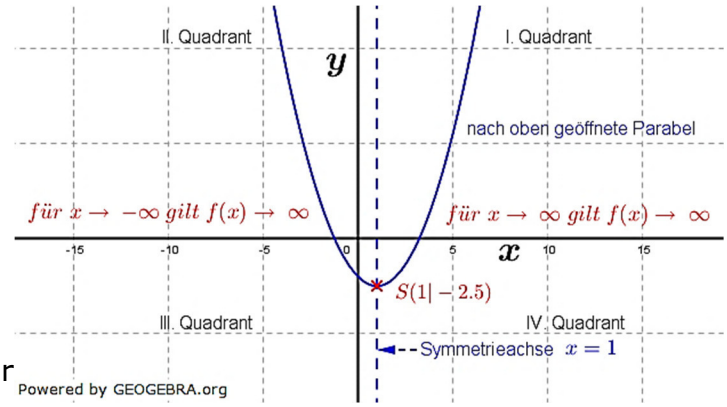
$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot 2} = -2; \quad y_S = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{64}{8} + 12 = 4$

$f(x) = 2(x+2)^2 + 4; \quad S(-2|4)$.

Symmetrie- und Globalverhalten

Es gibt zwei Arten von Symmetrieverhalten, nämlich die Achsensymmetrie und die Punktsymmetrie. Genaueres hierüber erfährst du um Kapitel „Graphen und Funktionen analysieren".

Eine quadratische Funktion ist stets achsensymmetrisch zur Achse, die durch den Scheitelpunkt verläuft.



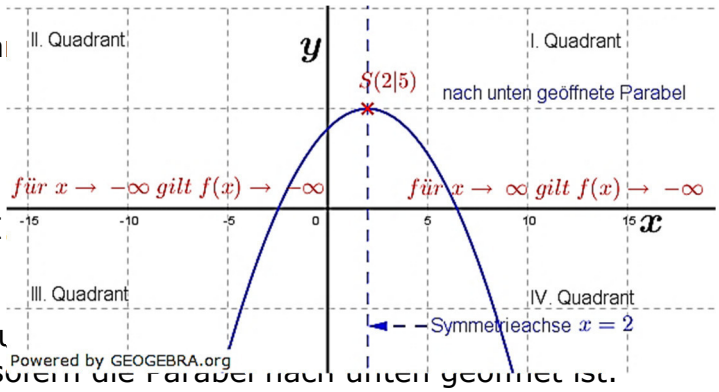
Beim Globalverhalten will man wissen, wo der Graph einer Funktion herkommt und wo er hinläuft.

Will man wissen, wo der Graph einer Funktion herkommt, muss man den y-Wert der Funktion für den Wert $x = -\infty$ bestimmen.

Will man wissen, wo der Graph einer Funktion hinläuft, muss ma den y-Wert der Funktion für den Wert $x = +\infty$ bestimmen.

Der Graph einer quadratischen Funktion kommt aus dem II. Quadranten und verläuft in den I Quadranten, sofern die Parabel nach oben geöffnet ist.

Der Graph einer quadratischen Fu verläuft in den IV. Quadranten, sofern die Parabel nach unten geöffnet ist.



Beispiel 5: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$. Bestimme die Gleichung der Symmetrieachse und gib das globale Verhalten an.

Lösung 5: Wir stellen zunächst die Funktionsgleichung von f um in die Scheitelpunktgleichung.

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2 \quad | \quad \cdot 2$

$2f(x) = x^2 - 2x - 4$

$2f(x) = (x-1)^2 - 1 - 4$

$2f(x) = (x-1)^2 - 5 \quad | \quad :2$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{5}{2}$

Die Parabel hat den Scheitelpunkt $S\left(1\middle|-\frac{5}{2}\right)$.

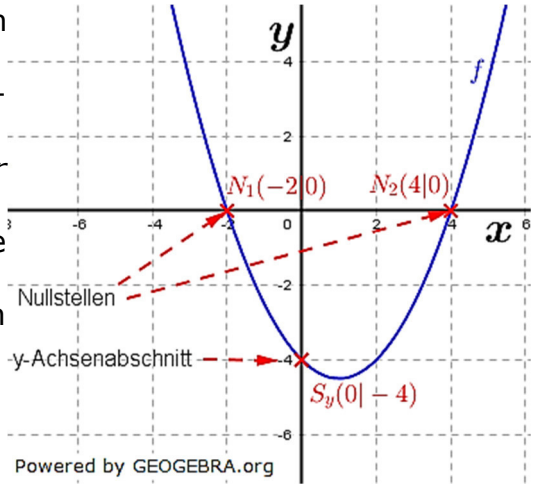
Damit ist $x = 1$ Symmetrieachse von f.

f ist nach oben geöffnet, somit gilt:

Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to \infty$; Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to \infty$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Es gibt zwei Arten von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.
Die erste Art sind die Schnittpunkte mit der x-Achse, *Nullstellen* genannt.
*Eine **Nullstelle** heißt **Nullstelle**, weil dort der **y-Wert Null** ist.*
Aus dieser Tatsache heraus lassen sich Nullste berechnen, indem man den y-Wert der Funktionsgleichung auf den Wert n setzt und die Gleichung nach x auflöst.
Die zweite Art ist der Schnittpunkt mit der y-Achse, vielfach auch als y-Achsenabschnitt bezeichnet.



*Im **Schnittpunkt** mit der y-Achse ist der **x-Wert Null**.*
Aus dieser Tatsache heraus lässt sich Schnittpunkt mit der y-Achse berechnen, indem man alle Vorkommen von x auf null setzt und y berechnet, also $f(0)$ bildet.

Beispiel 6: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-4$.
Bestimme alle Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Lösung 6: Nullstellen:
Wir setzen $f(x)=0$ und lösen die Gleichung nach x auf:

$\frac{1}{2}x^2-x-4=0 \quad | \quad \cdot 2$
$x^2-2x-8=0$
$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+8} \quad | \quad p/q$-Formel
$x_1=1+3=4;\ \ x_2=1-3=-2$

Die Nullstellen haben die Koordinaten $N_1(-2|0)$ und $N_2(4|0)$.
y-Achsenabschnitt:
Wir bilden $f(0)$:
$f(0)=\frac{1}{2}\cdot 0^2-x-4=-4$
Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die Koordinaten $S_y(0|-4)$.

Beispiel 7: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+x-1$.
Bestimme alle Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Lösung 7: Nullstellen:
Wir setzen $f(x)=0$ und lösen die Gleichung nach x auf:

$-\frac{1}{4}x^2+x-1=0 \quad | \quad \cdot(-4)$
$x^2-4x+4=0$
$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4} \quad | \quad p/q$-Formel
$x_1=2$

Die Nullstellen hat die Koordinaten $N_1(2|0)$. Da die quadratische Gleichung nur eine Lösung hat, sprechen wir hier von einer ***doppelten*** Nullstelle.
y-Achsenabschnitt:
Wir bilden $f(0)$:
$f(0)=-\frac{1}{4}\cdot 0^2+0-1=-1$
Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die Koordinaten $S_y(0|-1)$.

Beispiel 8: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{8}x^2-x+4$.
Bestimme alle Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Lösung 8: Nullstellen:
Wir setzen $f(x)=0$ und lösen die Gleichung nach x auf:

$\frac{1}{8}x^2-x+4 \quad | \quad \cdot 8$

$x^2-8x+32=0$

$x_{1,2}=4\pm\sqrt{16-32} \quad | \quad p/q$-Formel

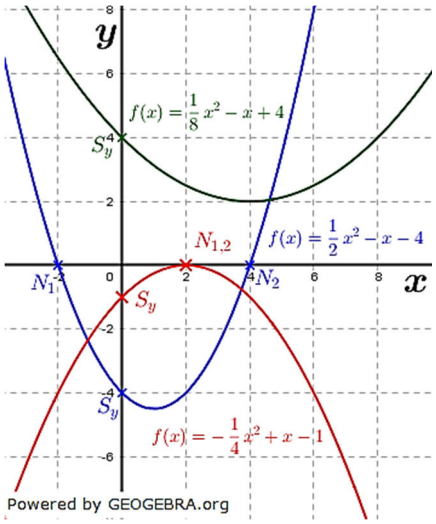
Die Gleichung hat keine Lösung, die Diskriminante ist kleiner null.
Der Graph der Funktion f hat keine Nullstellen.
y-Achsenabschnitt:
Wir bilden $f(0)$:
$f(0)=\frac{1}{8}\cdot 0^2-0+4=4$
Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die Koordinaten $S_y(0|4)$.

Die Lösungsergebnisse führen uns zu folgendem

Merksatz Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse heißen Nullstellen.
Wir berechnen Nullstellen, indem wir die Funktionsgleichung $f(x)$ auf null setzen und nach x auflösen.
Hat die auf null gesetzte Funktionsgleichung keine Lösung, so existieren auch keine Nullstellen.

Die Schnittpunkte einer Funktion f mit der y-Achse wird auch als y-Achsenabschnitt bezeichnet.
Wir berechnen den Schnittpunkt mit der y-Achse, indem wir $f(0)$ bilden.



Gegenseitige Lage von Parabeln und Geraden

Eine Parabel und eine Gerade können verschiedene Lagen zueinander haben. Zur Untersuchung dieser gegenseitigen Lage prüfen wir, ob es gemeinsame Punkte gibt. Wir erinnern uns an einen Basissatz der Funktionsbetrachtung:

Gemeinsame Punkte von Graphen zweier Funktionen heißen Schnittpunkte.

Schnittpunkte bestimmen wir durch Gleichsetzung der Funktionsgleichungen und Auflösen der dabei entstandenen Gleichung nach der Variablen x.

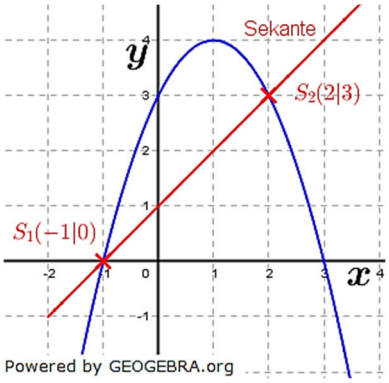
Die folgenden drei Beispiele veranschaulichen die Möglichkeiten der gegenseitigen Lage von Parabeln und Geraden.

Beispiel 9: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ sowie die Gerade g mit $g(x) = x + 1$.
Prüfe die gegenseitige Lage von f und g.

Lösung 9: Gleichsetzung:
$f \cap g$:

$-x^2 + 2x + 3 = x + 1 \quad | \quad -x;\ -1$
$-x^2 + x + 2 = 0 \quad | \quad \cdot(-1)$
$x^2 - x - 2 = 0$
$x_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 2} \quad | \quad p/q$-Formel
$x_1 = 2; \quad x_2 = -1$
$g(2) = 3; \quad g(-1) = 0$

Die Gerade g schneidet die Parabel f zweimal in $S_1(-1|0)$ und $S_2(2|3)$.

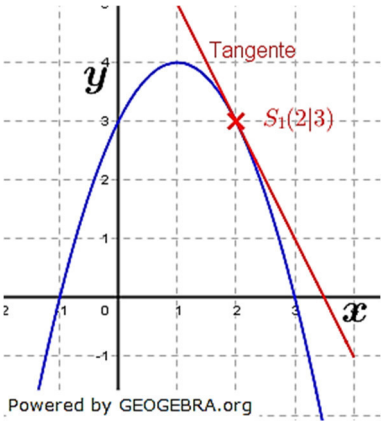


Beispiel 10: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ sowie die Gerade g mit $g(x) = -2x + 7$.
Prüfe die gegenseitige Lage von f und g.

Lösung 10: Gleichsetzung:
$f \cap g$:

$-x^2 + 2x + 3 = -2x + 7 \quad | \quad +2x;\ -7$
$-x^2 + 4x - 4 = 0 \quad | \quad \cdot(-1)$
$x^2 - 4x + 4 = 0$
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 4} \quad | \quad p/q$-Formel
$x_1 = 2$
$g(2) = 1$

Die Gerade g berührt die Parabel f in $S_1(2|1)$.

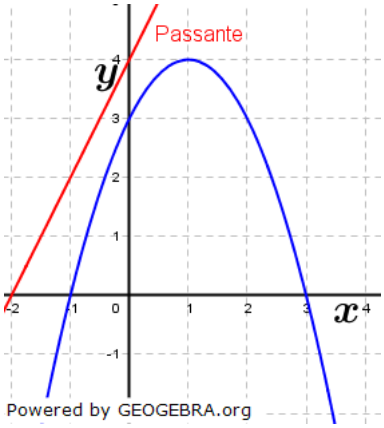


Beispiel 11: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ sowie die Gerade g mit $g(x) = x2 + 4$.
Prüfe die gegenseitige Lage von f und g.

Lösung 11: Gleichsetzung:
$f \cap g$:

$-x^2 + 2x + 3 = 2x + 4 \quad | \quad -2x;\ -3$
$-x^2 = 1 \quad | \quad \cdot(-1)$
$x^2 = -1 \quad | \quad \sqrt{\ }$

$\sqrt{\ }$ aus negativem Wert nicht möglich.
Die Gerade g hat keine gemeinsamen Punkte mit f. g passiert f.



Die Lösungsergebnisse führen uns zu folgendem

Merksatz Lage von Gerade und Parabel

Schneidet eine Gerade eine Parabel in zwei verschiedenen Punkten, so heißt diese Gerade ***Sekante***; die beiden Punkte nennen wir ***Schnittpunkte***.

Berührt eine Gerade eine Parabel in einem Punkt, so heißt diese Gerade ***Tangente***, den gemeinsamen Punkt nennen wir ***Berührpunkt***.

Haben eine Gerade und eine Parabel keinen gemeinsamen Punkte, so heißt diese Gerade ***Passante***.

Aufstellen von quadratischen Funktionstermen

Durch welche Parabel kann der Verlauf des Brückenbogens der Yangtze River Brücke (China) näherungsweise beschrieben werden?

Brücke über den Yangtze River

In vielen Fällen ist der Term einer quadratischen Funktion nicht von vornherein bekannt. Ausgehend von bestimmten Eigenschaften eines parabelförmigen Gebildes, können wir jedoch einen solchen Term bestimmen.
Im obigen Bild z. B. wäre der höchste Punkt des Brückenbogens von Interesse, denn den könnten wir zum Scheitelpunkt einer Parabel erklären. Weiterhin könnten wir die linke und rechte Verankerung des Bogens am Ufer als Nullstellen einer Parabel in einem geeigneten Koordinatensystem ansehen. Alleine aus diesen beiden Eigenschaften ließe sich dann ein quadratischer Funktionsterm aufstellen.

Ein quadratischer Funktionsterm lässt sich wie folgt darstellen:

Hauptform:	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Parameter: a, b, c
Produktform:	$f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$	Parameter: a, x_1, x_2
Scheitelform:	$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$	Parameter: a, x_S, y_S

Alle drei Darstellungsformen enthalten jeweils drei Parameter. Um einen Funktionsterm aufzustellen, müssen diese drei Parameter aus bekannten Eigenschaften bestimmt werden.

Wollen wir nun einen Funktionsterm bestimmen, so kommt es darauf an, was gegeben ist. Ist der Scheitel bekannt, wird man den Funktionsterm in der Scheitelform ansetzen. Sind zwei Nullstellen bekannt, wählen wir die Produktform. Die Hauptform hat drei Unbekannte a, b, und c, dazu benötigen wir drei bekannte Punkte, die auf der Parabel liegen.
Die genaue Vorgehensweise kannst du in den nächsten vier Beispielen sehen.

Beispiel 12: Bestimme den Funktionsterm einer quadratischen Funktion, wenn der Graph…

a) …achsensymmetrisch zur y-Achse ist und durch die Punkte $P(1|-2)$ und $Q(2|1)$ geht.

b) …die y-Achse in $S(0|1)$ schneidet und durch die Punkte $P(2|-1)$ und $Q(-1|-4)$ geht.

c) …eine verschobene, an der x-Achse gespiegelte Normalparabel ist, die durch die Punkte $P(1|0)$ und $Q(-2|3)$ geht.

Lösung 12: Diese Aufgaben sind vom Typ „Funktionsterm mit zwei bekannten Punkten und besonderen Eigenschaften".

a) Eine zur y-Achse achsensymmetrische Parabel ist in x-Richtung nicht verschoben, damit erhalten wir den Funktionsansatz:

$f(x) = ax^2 + c$

(1)	$-2 = a \cdot 1^2 + c$	|	Punktprobe mit $P(1\|-2)$
(2)	$1 = a \cdot 2^2 + c$	|	Punktprobe mit $Q(2\|1)$
(1)-(2)	$-3 = -3a$	|	$:-3$
	$a = 1$		
$a \to (1)$	$-1 = 1 + c$	|	-1
	$c = -2$		
	$f(x) = x^2 - 2$		

b) Parabel durch drei bekannte Punkte, damit erhalten wir den Funktionsansatz:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Aus dem Punkt $S(0|1)$ heraus ergibt sich $c = 1$.

(1)	$-1 = a \cdot 2^2 + 2b + 1$	|	Punktprobe mit $P(2\|-1)$
(2)	$4 = a \cdot (-1)^2 - b + 1$	|	Punktprobe mit $Q(-1\|4)$
(1)	$-1 = a \cdot 2^2 + 2b + 1$	|	-1
(2)	$4 = a \cdot (-1)^2 - b + 1$	|	$-1;\ \cdot 2$
(1)	$4a + 2b = -2$		
(2)	$2a - 2b = 6$		
(1)+(2)	$6a = 4$	|	$:6$
	$a = \frac{2}{3}$		
$a \to (1)$	$4 \cdot \frac{2}{3} + 2b = -2$	|	$-\frac{8}{3}$
	$2b = -\frac{14}{3}$	|	$:2$
	$b = -\frac{7}{3}$		
	$f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$		

c) Eine an der x-Achse gespiegelte Normalparabel hat den Parameterwert $a = -1$. Zwei weitere Punkte sind bekannt, damit erhalten wir den Funktionsansatz:

$f(x) = -x^2 + bx + c$

(1)	$0 = -1 \cdot 1^2 + b + c$	|	Punktprobe mit $P(1\|0)$
(2)	$3 = -1 \cdot (-2)^2 - 2b + c$	|	Punktprobe mit $Q(-2\|3)$
(1)	$0 = -1 + b + c$	|	-1
(2)	$3 = -4 - 2b + c$	|	$+4$
(1)	$b + c = 1$		
(2)	$-2b + c = 7$		

(1)-(2)	$3b = -6$	|	$:3$
	$b = -2$		
$b \to (1)$	$-2 + c = 1$	|	$+2$
	$c = 3$		
	$f(x) = -x^2 - 2x + 3$		

Beispiel 13: Der Graph einer quadratischen Funktion geht durch $P(1|-2)$. Er schneidet die x-Achse in den Punkten $N_1(-1|0)$ und $N_2(3|0)$. Bestimme den Funktionsterm in der Hauptform.

Lösung 13: Diese Aufgabe ist vom Typ „Funktionsterm mit zwei bekannten Nullstellen und einem weiteren bekannten Punkt". Damit erhalten wir den Ansatz:
$f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$
mit x_1 und x_2 als den beiden Nullstellen.

$f(x) = a(x+1) \cdot (x-3)$		
$-2 = a(1+1) \cdot (1-3)$	|	Punktprobe mit $P(1\|-2)$
$-2 = a \cdot 1 \cdot (-2)$		
$-2 = -2a \;\; => \;\; a = 1$		
$f(x) = 1 \cdot (x+1) \cdot (x-3)$	|	Produktform
$f(x) = x^2 - 2x - 3$	|	Hauptform

Beispiel 14: Eine quadratische Funktion f hat an der Stelle $x = 1$ den kleinsten Funktionswert -2. Bei $x = 3$ hat sie den Funktionswert -1. Gib den Funktionsterm in der Hauptform an.

Lösung 14: Diese Aufgabe ist vom Typ „Funktionsterm mit Scheitel und weiterem Punkt". Damit erhalten wir den Ansatz:
$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$
mit x_S und y_S als Koordinaten des Scheitels.

$f(x) = a \cdot (x-1)^2 - 2$		
$-1 = a \cdot (3-1)^2 - 2$	|	Punktprobe mit $P(3\|-1)$
$-1 = 4a - 2$	|	$+2$
$1 = 4a \;\; => \;\; a = \frac{1}{4}$		
$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x-1)^2 - 2$	|	Scheitelform
$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$	|	Hauptform

Beispiel 15: Der kleinste Funktionswert einer quadratische Funktion f ist -2. Ihre Nullstellen sind bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$. Bestimme den Funktionsterm in der Hauptform.

Lösung 15: Diese Aufgabe ist vom Typ „Funktionsterm mit Nullstellen und kleinstem Funktionswert". Aus Symmetriegründen liegt der kleinste Funktionswert ja genau in der Mitte der beiden Nullstellen. Somit haben wir den Scheitelpunkt $S(1|-2)$.
Die Aufstellung des Funktionsterms kann somit wie in Beispiel 13 erfolgen, alternativ über die Produktform gemäß Beispiel 12.
Scheitelform:
$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$
mit x_S und y_S als Koordinaten des Scheitels.
$f(x) = a \cdot (x-1)^2 - 2$

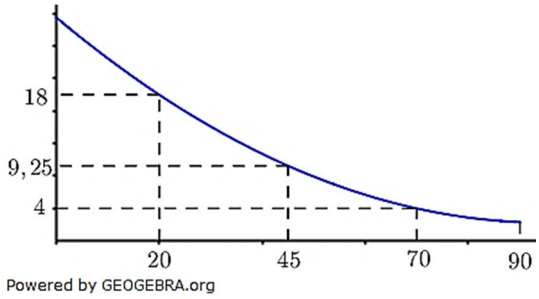
$0 = a \cdot (-1-1)^2 - 2$ | Punktprobe mit $N_1(-1|0)$
$0 = 4a - 2$ | $+2$
$2 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$
$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 - 2$ | Scheitelform
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ | Hauptform

Quadratische Funktionen der Anwendungsorientierung

Viele Realsituationen unserer Umwelt lassen sich durch Parabelfunktionen beschreiben. Mit ihrer Hilfe kann man z. Bsp. den Verlauf eines Brückenbogens beschreiben. Eine große Anzahl von Naturgesetzen kann durch Parabelfunktionen dargestellt werden, wie zum Beispiel die Strecke im freien Fall, der Weg einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung, die kinetische Energie eines bewegten Körpers, der Energieinhalt eines Kondensators usw.

Die nachfolgenden zwei Beispiele zeigen uns Situationen im Realleben.

Beispiel 16: Wir betrachten eine Skisprungschanze. Die nebenstehende Abbildung zeigt deren Querschnitt in m. Die Form der Anlaufspur ähnelt in ihrer Form einer quadratischen Funktion, einer Parabel. Uns ist bewusst, dass dies nur eine Annäherung sein kann. Dennoch wollen wir versuchen, einen Funktionsterm aufzustellen, der die Realität so nah als möglich trifft.



Lösung 16: Für die Bestimmung einer quadratischen Funktion benötigen wir maximal drei Punkte, siehe auch Aufgabe 11b) im Kapitel „Aufstellen von quadratischen Funktionstermen". Wir legen den Koordinatenursprung nach unten links bei 0 Meter Höhe und 0 Meter Abstand. Dadurch können wir drei Koordinatenpunkte definieren mit $P_1(20|18)$, $P_2(45|9{,}25)$ und $P_3(70|4)$. Damit erhalten wir den Funktionsansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$

(1) $18 = 400a + 20b + c$ | Punktprobe mit $P_1(20|18)$
(2) $9{,}25 = 2025a + 45b + c$ | Punktprobe mit $P_2(45|9{,}25)$
(3) $4 = 4900a + 70b + c$ | Punktprobe mit $P_3(70|4)$

(1) umstellen nach c:
$18 - 400a - 20b = c$
$c \rightarrow (2); (3)$
(2) $9{,}25 = 2025a + 45b + 18 - 400a - 20b$
(3) $4 = 4900a + 70b + 18 - 400a - 20b$
(2) $9{,}25 = 1625a + 25b + 18$ | -18
(3) $4 = 4500a + 50b + 18$ | -18
(2) $1625a + 25b = -8{,}75$
(3) $4500a + 50b = -14$

(2) umstellen nach $25b$:

$$25b = -1625a - 8{,}75$$

$25b \rightarrow (3)$

(3) $4500a + 2 \cdot (-1625a - 8{,}75) = -14$

$4500a - 3250a - 17{,}5 = -14$

$1250a = 3{,}5$

$a = 0{,}0028$

$a \rightarrow (2)$ $25b = -1625 \cdot 0{,}0028 - 8{,}75 = -13{,}3$

$b = -0{,}532$

$a; b \rightarrow (1)$ $c = 18 - 400 \cdot 0{,}0028 - 20 \cdot (-0{,}532) = 27{,}52$

Die Funktion f, die den Verlauf der Skisprungschanze beschreibt hat die Funktionsgleichung $f(x) = 0{,}0028x^2 - 0{,}532x + 27{,}52$.

Beispiel 17: Die Gesamtkosten eines Betriebes in € können in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x der folgenden Tabelle entnommen werden.

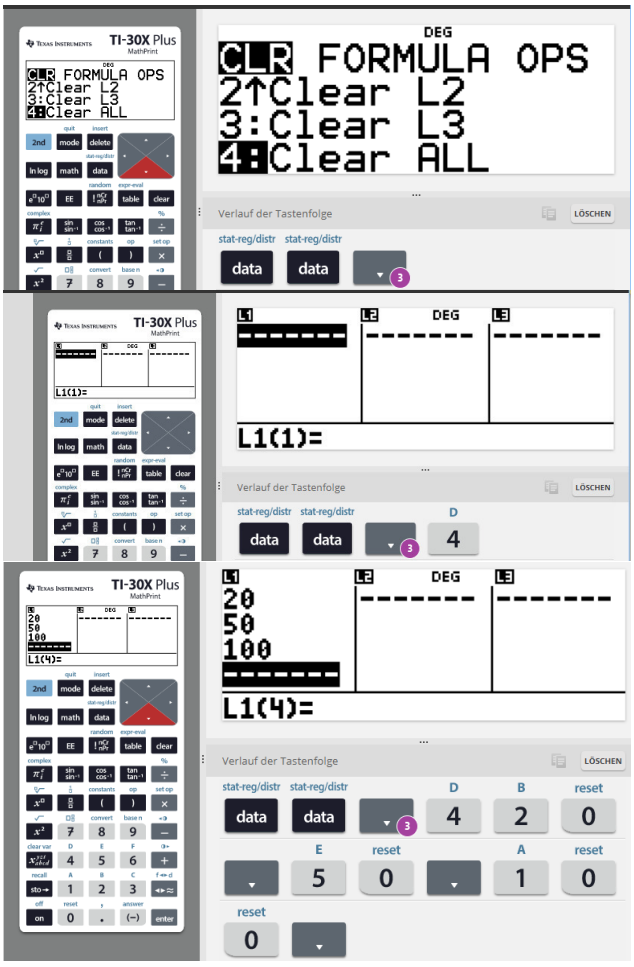
x	20	50	100
$K(x)$	212	237,5	300

Bestimme die Kostenfunktion K unter der Annahme, dass es sich um eine quadratische Funktion handelt, über eine Regression.

Lösung 17: Regression bedeutet Bestimmung mittels GR/WTR.
Die nachfolgenden Grafiken zeigen die erforderlichen Schritte auf einem TI-30X Plus Multiview.

Lösche zunächst alle L-Speicher, indem du zweimal die Taste „DATA" drückst und dann mit der Pfeiltaste nach unten auf die „4: Clear All" gehst. Drücke dann auf die „4" und du erhältst nebenstehende Anzeige.

Unter „L1" gibst du jetzt die Werte der ersten Tabellenzeile ein.
Nachdem du eine Zahl eingegebene hast, betätige die „Pfeil nach unten"-Taste zur Eingabe der nächsten Zahl.



Ist der L1-Speicher eingegeben, betätige die „Pfeil nach rechts"-Taste, und due gelangst zur Eingabe der zweiten Tabellenzeile.

Sind alle Werte eingegeben, so drücke die „2nd"-Taste und danach auf „data". Positioniere dich dann mit der „Pfeil nach unten" Taste auf die „7: QuadraticReg".

Drücke danach die „Enter"-Taste und betätige die „Pfeil nach unten"-Taste solange, bis der Cursor auf „Calc" blinkt.

Nun noch einmal die „Enter"-Taste drücken und schon siehst du das Ergebnis mit:
$a = 0{,}05;\ b = 0{,}5$ und $c = 200$.

Betätige noch ein paarmal die „Pfeil nach unten"-Taste, bis du „4: R²" siehst. Je näher dieser Wert an „1" ist, umso genauer ist die Regression. In diesem Falle ist sie sogar ganz genau.

Die Kostenfunktion lautet:
$K(x) = 0{,}05x^2 + 0{,}5x + 200$

Quadratische Funktionen mit Parameter

Bei Funktionen, deren Funktionsterm einen Parameter enthält – also eine zusätzliche Variable zu x - heißen Funktionen mit Parameter. Je nach Wert dieses Parameters – der Mathematiker bezeichnet diesen Parameter üblicherweise mit t - ändert sich der globale Verlauf des Graphen der Funktion in der Regel nicht, wohl aber ganz bestimmte Funktionswerte. Ein ganzrationaler Funktionsterm 2. Ordnung mit Parameter stellt eine *Parabelschar* dar.
Die folgenden Beispiele stellen nur einen kleinen Einblick in die Funktionen mit Parameter dar. Weitere Aufgaben und Erläuterungen findest du in den Aufgabenblättern Level 3 / Expert.

Beispiel 18: Gegeben ist die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = tx^2 - 3tx; x; t \in \mathbb{R}, t \neq 0$. K_t ist das Schaubild von f_t. Beschreibe den Verlauf von K_t in Abhängigkeit von t.

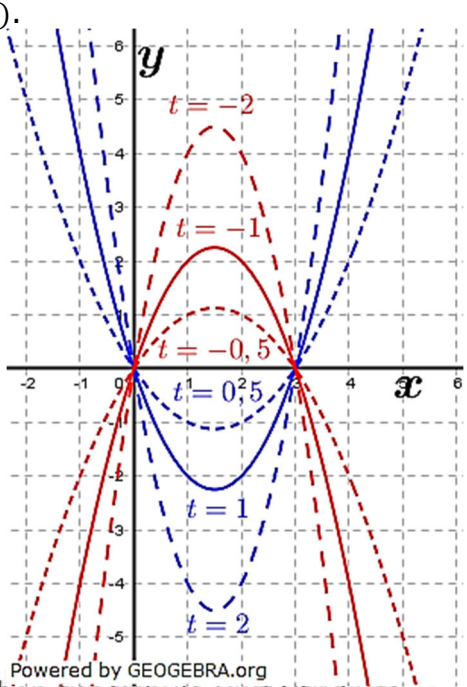
Lösungslogik 18

Wir überlegen zunächst. Der Parameter t ist eine reelle Zahl. Je nach Wahl des Wertes von t ist es möglich, viele Parabeln zu beschreiben. Für jedes gewählte t erhalten wir einen anderen Funktionsterm. Der Parameter t beeinflusst im Ursprungsterm den Koeffizienten von x^2. Wir wissen jedoch, dass der Koeffizient von x^2 eine Streckung der Parabel in y-Richtung als auch die Öffnungsrichtung (nach oben geöffnet, nach unten geöffnet) beeinflusst.
Wir wissen weiterhin, dass der Koeffizient von x die Verschiebung einer Parabel in x–Richtung beeinflusst. Weiterhin muss die Parabelschar ihren Schnittpunkt mit der y–Achse im Ursprung haben, denn das absolute Glied c fehlt. Sind also noch die Nullstellen der Parabelschar von Interesse. Hierzu bilden wir aus $f_t(x) = tx^2 - 3tx$ durch Ausklammern $f_t(x) = tx(x-3)$. Wir erkennen, dass die Parabelschar in x-Richtung um 3 Stellen nach rechts verschoben ist und dass über den Satz vom Nullprodukt die Nullstellen bei $tx = 0$ und $x - 3 = 0$ liegen.
Da gemäß Aufgabe $t \neq 0$ ist, liegen die Nullstellen jeder Parabel der Parabelschar somit bei $N_1(0|0)$ und $N_2(3|0)$.

Lösung 18: Nullstellen:
$f_t(x) = tx^2 - 3tx = tx(x-3)$
$tx(x-3) = 0$
$x_1 = 0; \quad x_2 = 3$ | Satz vom Nullprodukt
Die Parabelschar hat bei $N_1(0|0)$ und $N_2(3|0)$ gemeinsame Nullstellen und ist achsen-symmetrisch zur Achse $x = 3$.

Die Parabeln sind nach oben geöffnet für $t > 0$.

Die Parabeln sind nach unten geöffnet für $t < 0$.



Beispiel 19: Gegeben ist für jedes reelle die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = -x^2 + 2tx - t^2 - t;\ x \in \mathbb{R}$. K_t ist das Schaubild von f_t.
Beschreibe den Verlauf von K_t in Abhängigkeit von f_t.

Lösungslogik 19:

Wir erkennen aus der gegebenen Funktion f_t:

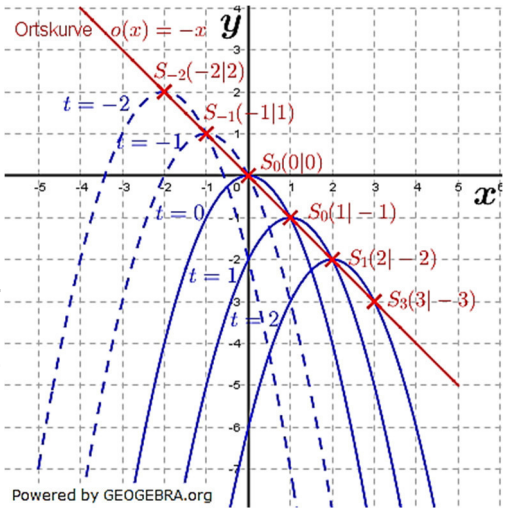
1. Alle Parabeln der Parabelschar sind nach unten geöffnete Normalparabeln (der Koeffizient von x^2 ist konstant mit -1).
2. Die Parabelschar ist in x-Richtung in Abhängigkeit von t verschoben (es existiert ein x–Glied mit dem Koeffizienten $2t$).
3. Die einzelnen Parabeln schneiden die y–Achse in Abhängigkeit von t (das absolute Glied lautet $-t^2 - t$).

Da in dieser Aufgabe lediglich die Verschiebung in x–Richtung und der Schnittpunkt mit der y–Achse durch den Parameter t beeinflusst wird, bilden wir zunächst die Scheitelpunktgleichung.

$f_t(x) = -((x-t)^2 - t^2) - t^2 - t$
$f_t(x) = -(x-t)^2 + t^2 - t^2 - t$
$f_t(x) = -(x-t)^2 - t$

Jetzt erkennen wir, dass lediglich die Scheitelpunkte der Parabelschar vom Parameter t abhängig sind. Die Koordinaten der Scheitelpunkte lauten $S_t(t|-t)$. Wenn aber eine Punkteschar S_t vorliegt, deren x–Koordinate und y-Koordinate einen lediglich durch das Minuszeichen veränderten Wert darstellen, so muss diese Punkteschar auf einer Geraden mit der Steigung $m = -1$ liegen.

Lösung 19: Scheitelpunktgleichung:
$f_t(x) = -(x-t)^2 - t$
$x_S = t;\quad y_S = -t;\quad S_t(t|-t)$
$t = x_s$
Für Ortskurve der Scheitelpunkte:
$t \to y_s$
$o(x) = -x$
Die Parabelschar besteht aus nach unten geöffneten Normalparabeln deren Scheitelpunkte auf der Geraden mit der Gleichung $o(x) = -x$ für alle $t \in \mathbb{R}$ liegen. Die Parabelschar hat keine gemeinsamen Punkte mit der x-Achse.



Level 1 – Grundlagen – Blatt 1

Dokument mit 38 Aufgaben

Aufgabe A1

Entscheide und begründe, ob eine lineare oder quadratische Funktion vorliegt.

a) $f(x) = 2x$
b) $f(x) = x^2 + 2$
c) $f(x) = -x + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
d) $f(x) = x^2 + 0{,}5$
e) $f(x) = 3x + 2^2$
f) $f(x) = 3x^2 + 2$

Aufgabe A2

Welche Punkte liegen nicht auf der Normalparabel.

a) $A(1|1)$
b) $B(1|-1)$
c) $C(2|-2)$
d) $D(0{,}5|0{,}5)$
e) $E(-2|4)$
f) $F(1{,}5|3)$
g) $G(1{,}5|-3)$
h) $H(-1{,}5|-2{,}25)$
i) $I(2{,}5|6{,}25)$

Aufgabe A3

Liegt der Punkt auf der Normalparabel, oberhalb oder unterhalb der Kurve? Löse zunächst ohne Zeichnung und überprüfe dann dein Ergebnis mit dem Graphen.

a) $A(3{,}5|12{,}25)$
b) $B(-2{,}4|5{,}76)$
c) $C(1{,}4|2{,}1)$
d) $D(0{,}9|0{,}5)$
e) $E(-0{,}4|0{,}4)$
f) $F(-1{,}8|3{,}6)$

Aufgabe A4

Zeichne im Bereich $-2 \le x \le 2$ den Graphen von f. Lies die Koordinaten des Scheitels ab. Gibt es einen kleinsten oder größten Funktionswert?
Gib die Wertemenge an für die auf den Zeichenbereich eingeschränkte Definitionsmenge.

a) $f(x) = -x^2$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
c) $f(x) = x^2 - 3$
d) $f(x) = x^2 - x$
e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 1$
f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1$

Aufgabe A5

Gegeben ist die Wertetabelle einer Funktion f mit $f(x) = ax^2$. Bestimme a. Ergänze in der Tabelle die fehlenden Werte.

a)

x	2	4	6	8	10
$f(x)$	8	☐	☐	☐	☐

b)

x	-4	-3	-2	5	10
$f(x)$	☐	-45	☐	☐	☐

Aufgabe A6

Beschreibe, wie der Graph der Funktion f aus der Normalparabel entsteht. Skizziere die Parabel.

a) $f(x) = -x^2 + 3$
b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 1$
c) $f(x) = (x+3)^2$
d) $f(x) = -\frac{3}{2}(x-1)^2$
e) $f(x) = -(x-1{,}5)^2$
f) $f(x) = -(x+1)^2 - 1$
g) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$
h) $f(x) = -\frac{3}{2}(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{3}$
i) $f(x) = -(x+\sqrt{2})^2 - \sqrt{3}$

Lösung A1

Lösungshilfe:

Eine quadratische Gleichung liegt nur dann vor, wenn die Variable x höchstens im Quadrat (x^2) vorkommt. Kommt die Variable x nicht im Quadrat vor, liegt auch keine quadratische Gleichung vor.
Eine lineare Gleichung liegt nur dann vor, wenn die Variable x ohne Potenz (Potenz = „1“) vorkommt.

a) $f(x) = 2x$ ist eine lineare Funktionsgleichung.
b) $f(x) = x^2 + 2$ ist eine quadratische Funktionsgleichung.
c) $f(x) = -x + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ist eine lineare Funktionsgleichung.
d) $f(x) = x^2 + 0{,}5$ ist eine quadratische Funktionsgleichung.
e) $f(x) = 3x + 2^2$ ist eine lineare Funktionsgleichung.
d) $f(x) = 3x^2 + 2$ ist eine quadratische Funktionsgleichung.

Lösung A2

Lösungshilfe:

Ein Punkt liegt dann auf der Normalparabel (mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2$), wenn mit einer Punktprobe eine wahre Aussage eintritt.
Bei einer Punktprobe musst du den Ausdruck $f(x)$ durch den y-Wert des Punktes ersetzen und den x-Wert in die Funktionsgleichung einsetzen.

Detaillierte Lösung für a)
$f(x) = x^2$ mit $A(1|1)$
$1 = 1^2$
$1 = 1$ | wahre Aussage
Der Punkt $A(1|1)$ liegt auf der Normalparabel.

b) $B(1|-1);\ -1 = 1$ | Widerspruch
Der Punkt $B(1|-1)$ liegt nicht auf der Normalparabel.
c) $C(2|-2);\ -2 = 4$ | Widerspruch
Der Punkt $C(2|-2)$ liegt nicht auf der Normalparabel.
d) $D(0{,}5|0{,}5);\ 0{,}5 = 0{,}25$ | Widerspruch
Der Punkt $D(0{,}5|0{,}5)$ liegt nicht auf der Normalparabel.
e) $E(-2|4);\ 4 = (-2)^2 = 4$ | wahre Aussage
Der Punkt $E(-2|4)$ liegt auf der Normalparabel.
f) $F(1{,}5|3);\ 3 = 1{,}5^2 = 2{,}25$ | Widerspruch
Der Punkt $F(1{,}5|3)$ liegt nicht auf der Normalparabel.
g) $G(1{,}5|-3);\ -3 = 1{,}5^2 = 2{,}25$ | Widerspruch
Der Punkt $G(1{,}5|-3)$ liegt nicht auf der Normalparabel.
h) $H(-1{,}5|-2{,}25);\ -2{,}25 = 2{,}25$ | Widerspruch
Der Punkt $G(-1{,}5|-2{,}25)$ liegt nicht auf der Normalparabel.
i) $I(2{,}5|6{,}25);\ 6{,}25 = 2{,}5^2 = 6{,}25$ | wahre Aussage
Der Punkt $I(2{,}5|6{,}25)$ liegt auf der Normalparabel.

Lösung A3

Lösungshilfe:

Um zu prüfen, ob ein Punkt auf, oberhalb oder unterhalb des Graphen einer Funktion liegt, setze x in die Funktionsgleichung ein und berechne $f(x)$. Ist das Ergebnis größer als der gegebene y-Wert des Punktes, so liegt der Punkt oberhalb, ist das Ergebnis kleiner, so liegt der Punkt unterhalb ist er gleich, so liegt der Punkt auf dem Graphen der Funktion.

a) $A(3{,}5|12{,}25)$
$f(3{,}5) = 3{,}5^2 = 12{,}25 \qquad y_A = 12{,}25 = f(3{,}5)$
Punkt liegt auf dem Graphen.

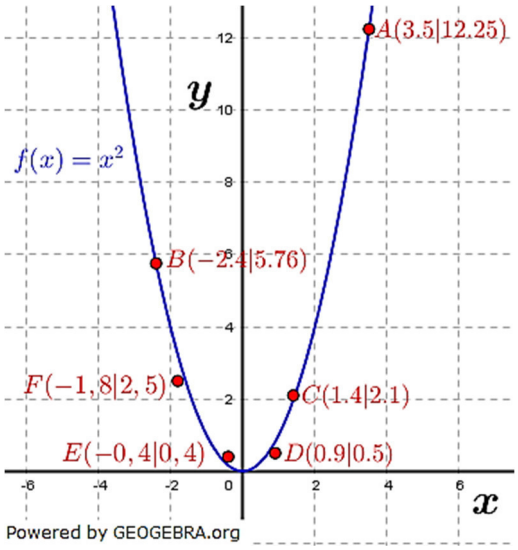
b) $B(-2{,}4|5{,}76)$
$f(-2{,}4) = (-2{,}4)^2 = 8{,}7 \quad y_A = 5{,}76 = f(-2{,}4)$
Punkt liegt auf dem Graphen.

c) $C(1{,}4|2{,}1)$
$f(1{,}4) = (1{,}4)^2 = 1{,}96 \qquad y_A = 2{,}1 > f(1{,}4)$
Punkt liegt oberhalb des Graphen.

d) $D(0{,}9|0{,}5)$
$f(0{,}9) = 0{,}9^2 = 0{,}81 \qquad y_A = 0{,}5 < f(0{,}9)$
Punkt liegt unterhalb des Graphen.

e) $E(-0{,}4|0{,}4)$
$f(-0{,}4) = (-0{,}4)^2 = 0{,}16 \; y_A = 0{,}4 > f(-0{,}4)$
Punkt liegt oberhalb des Graphen.

f) $F(-1{,}8|2{,}5)$
$f(-1{,}8) = (-1{,}8)^2 = 3{,}24 \; y_A = 2{,}5 < f(-1{,}8)$
Punkt liegt unterhalb des Graphen.

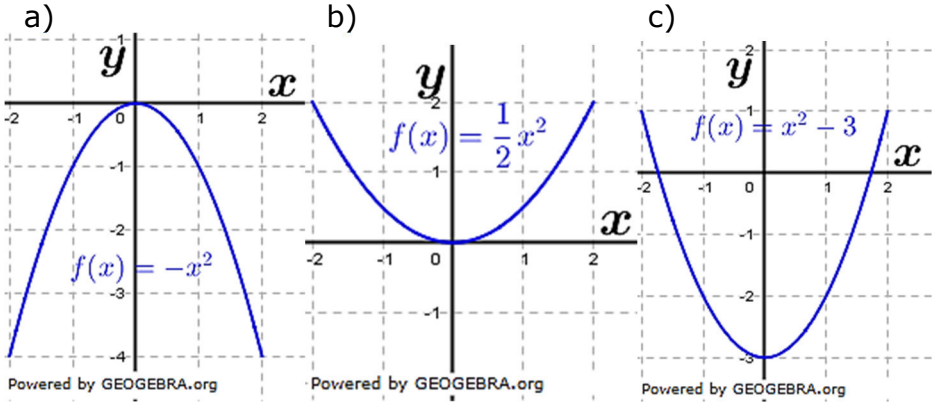


Lösung A4

Lösungshilfe:

Zum Zeichnen des Graphen einer Funktion kannst du entweder eine Wertetabelle aufstellen (bei dieser Aufgabe im Intervall $-2 \le x \le 2$) oder du verwendest die „table"-Funktion auf dem WTR.
Für die Wertemenge im gegebenen Intervall lies den kleinsten und größten y-Wert aus den Graphiken ab.

a) b) c)

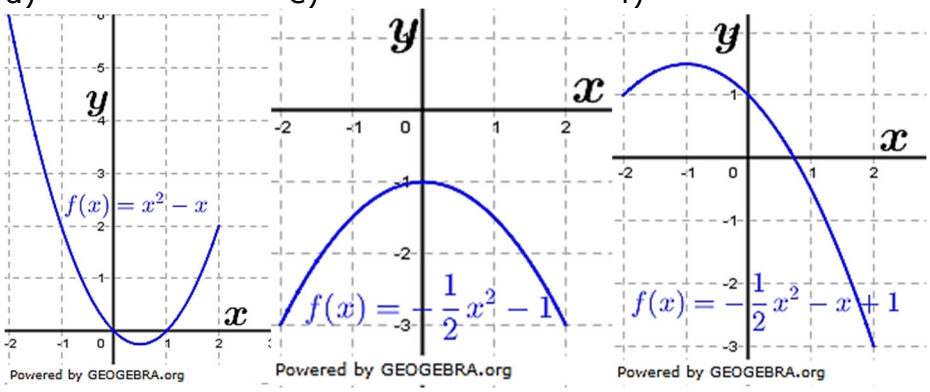


a) $S_y(0|0)$, größter Funktionswert ist $y = 0$. $\mathbb{W}_{-2\le x\le 2} = [-4; 0]$

b) $S_y(0|0)$, kleinster Funktionswert ist $y = 0$. $\mathbb{W}_{-2\le x\le 2} = [0; 2]$

c) $S_y(0|-3)$, kleinster Funktionswert ist $y = -3$. $\mathbb{W}_{-2\le x\le 2} = [-3; 1]$

d) e) f)



d) $S_y(0{,}5|-0{,}25)$, kleinster Funktionswert ist $y=-0{,}25$. $\mathbb{W}_{-2\le x\le 2}=[-0{,}25;6]$
e) $S_y(0|-1)$, größter Funktionswert ist $y=-1$. $\mathbb{W}_{-2\le x\le 2}=[-3;-1]$
f) $S_y(-1|1{,}5)$, kleinster Funktionswert ist $y=1{,}5$. $\mathbb{W}_{-2\le x\le 2}=[-3;1{,}5]$

Lösung A5

Lösungshilfe:
Zur Berechnung von a setze den einen gegebenen Punkt aus der Tabelle in die Gleichung $f(x)=ax^2$ ein.
Mit dem dann erhaltenen a berechne die anderen Funktionswerte und trage diese in die Tabelle ein.

a) $8=a2^2$ | Punktprobe mit $P(2|8)$
$4a=8 \Rightarrow a=2$
$f(4)=2\cdot 4^2=32;\ f(6)=2\cdot 6^2=72;\ f(8)=2\cdot 8^2=128;\ f(10)=2\cdot 10^2=200$

b) $-45=a(-3)^2$ | Punktprobe mit $P(-3|-45)$
$9a=-45 \Rightarrow a=-5$
$f(-4)=-5\cdot(-4)^2=-80;\ f(-2)=-5\cdot(-2)^2=-20;\ f(5)=-5\cdot 5^2=-125;$
$f(10)=-5\cdot 10^2=-500$

a)

x	2	4	6	8	10
$f(x)$	8	32	72	128	200

b)

x	-4	-3	-2	5	10
$f(x)$	-80	-45	-20	-125	-500

Lösung A6

Lösungshilfe:
Eine Normalparabel h besitzt die Gleichung $h(x)=x^2$.
Graphen von Funktionen kann man in x- und y-Richtung verschieben und strecken, an der x- bzw. y-Achse spiegeln und sogar an der 1. Winkelhalbierenden spiegeln.
Für eine quadratische Funktion gilt:
Streckung in y-Richtung: Wird durch den Koeffizienten a von ax^2 bestimmt.
Streckung in x-Richtung: keine
Verschiebung in y-Richung: $f(x)=h(x)+y_S$, y_S ist y-Kooridnate des Scheitels
Verschiebung in x-Richung: $f(x)=h(x-x_S)$, x_S ist x-Kooridnate des Scheitels
Spiegelung an der y-Achse: $f(x)=h(-x)$
Spiegelung an der x-Achse: $f(x)=-h(x)$
Spiegelung an x- und y-Achse: $f(x)=-h(-x)$

Der Graph der Funktion entsteht aus dem Graphen der Normalparabel durch:

a) $f(x) = -x^2 + 3$
   1. Spiegelung an der x-Achse;
   2. Verschiebung in y-Richtung um drei Einheiten nach oben.

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 1$
   1. Spiegelung an der x-Achse;
   2. Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{1}{2}$;
   3. Verschiebung in y-Richtung um eine Einheiten nach unten.

c) $f(x) = (x + 3)^2$
   1. Verschiebung in x-Richtung um drei Einheiten nach links.

d) $f(x) = f(x) = -\frac{3}{2}(x - 1)^2$
   1. Spiegelung an der x-Achse;
   2. Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{3}{2}$;
   3. Verschiebung in x-Richtung um eine Einheiten nach rechts.

e) $f(x) = -(x - 1{,}5)^2$
   1. Spiegelung an der x-Achse;
   2. Verschiebung in x-Richtung um $1{,}5$ Einheiten nach rechts.

f) $f(x) = -(x + 1)^2 - 1$
   1. Spiegelung an der x-Achse;
   2. Verschiebung in y-Richtung um eine Einheiten nach unten.

g) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 1$
   1. Spiegelung an der x-Achse;
   2. Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{1}{2}$;
   3. Verschiebung in x-Richtung um eine Einheiten nach rechts;
   4. Verschiebung in y-Richtung um eine Einheiten nach oben.

h) $f(x) = -\frac{3}{2}(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{3}$
   1. Spiegelung an der x-Achse;
   2. Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{3}{2}$;
   3. Verschiebung in x-Richtung um $\frac{1}{2}$ Einheit nach links;
   4. Verschiebung in y-Richtung um $\frac{1}{3}$ Einheit nach unten.

i) $f(x) = -(x + \sqrt{2})^2 - \sqrt{3}$
   1. Spiegelung an der x-Achse;
   2. Verschiebung in x-Richtung um $\sqrt{2}$ Einheiten nach links;
   3. Verschiebung in y-Richtung um $\sqrt{3}$ Einheit nach unten.

Level 1 – Grundlagen – Blatt 2

Dokument mit 34 Aufgaben

Aufgabe A1

Finde einen passenden Funktionsterm für die quadratische Funktion, deren Graph aus der Normalparabel entsteht, indem man sie …

a) … an der x-Achse spiegelt, mit dem Faktor 2 streckt und um eine Einheit nach rechts verschiebt.

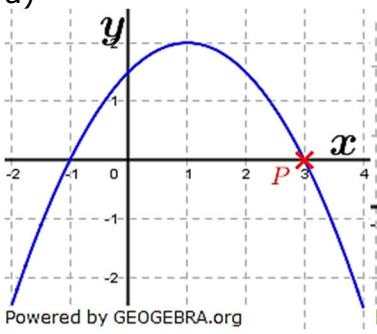
b) … mit dem Streckfaktor $0{,}5$ streckt (staucht), an der x-Achse spiegelt und anschließend um drei Einheiten nach rechts und eine Einheit nach oben verschiebt.

c) … mit dem Streckfaktor $-0{,}25$ streckt und anschließend um eine Einheit nach links und um zwei Einheiten nach unten verschiebt.

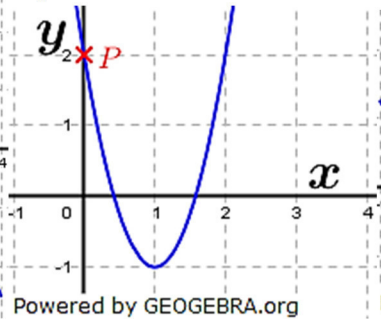
Aufgabe A2

Die Parabeln entstanden aus der Normalparabel. Lies den Streckungsfaktor ab und gib den Funktionsterm an. Prüfe dein Ergebnis mit einer Punktprobe von P.

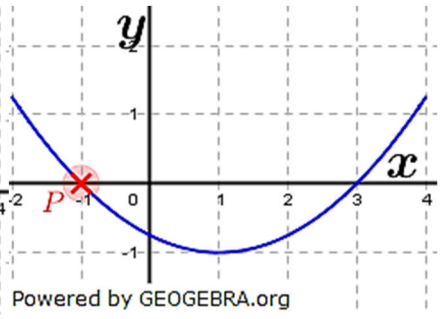
a)



b)



c)



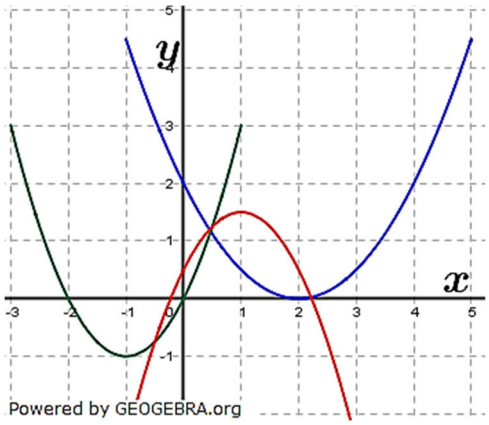
Aufgabe A3

Ordne die Parabeln den Funktionstermen f, g und h zu und bestimme die Variablen a, b, c, d, e und k.

$f(x) = -(x-a)^2 + b$

$g(x) = c(x-d)^2$

$h(x) = (x-k)^2 + e$



Aufgabe A4

Zeichne die Normalparabel in ein Koordinatensystem, bei dem zunächst die x-Achse und die y-Achse die Einheit $1\,cm$ haben. Trage dann für die y-Achse neue Einheiten ein, so wie unten angegeben. Gib dann den nun gültigen Funktionsterm an.

Bei der neuen y-Achseneinteilung entspricht $1\,cm$ …

a) 2 Einheiten b) $0{,}5$ Einheiten c) 10 Eineiten d) $0{,}1$ Einheiten

Level 1 – Grundlagen – Blatt 2

Aufgabe A5

Gib den Scheitel an. In welche Richtung ist die Parabel geöffnet?

a) $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ b) $f(x) = 2(x+1)^2 - 1$ c) $f(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2$

d) $f(x) = -\frac{1}{3}(x+4)^2 + 6$ e) $f(x) = \frac{2}{5}(x+6)^2$ f) $f(x) = 1{,}5x^2 - 2{,}5$

g) $f(x) = -x^2 - 1$ h) $f(x) = (x-2)^2 - \sqrt{5}$ i) $f(x) = \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\pi$

j) $f(x) = \left(x + \sqrt{2}\right)^2 - 30$ k) $f(x) = -\left(x - \sqrt{6}\right)^2 + \sqrt{2}$ l) $f(x) = (x + 1{,}8)^2 - e$

Aufgabe A6

Berechne die Scheitelkoordinaten und gib die Scheitelform an.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 2$ b) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ c) $f(x) = x^2 - 6x + 4$

d) $f(x) = -x^2 - x + 1$ e) $f(x) = 2x^2 + 2x + 2$ f) $f(x) = -2x^2 + x + 3$

g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$ h) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$ i) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$

Level 1 – Grundlagen – Blatt 2

Lösung A1

Lösungshilfe:

Streckung einer Parabel erfolgt über den Koeffizienten a.
Verschiebung in y-Richtung erfolgt über den Koeffizienten c.
Verschiebung in x-Richtung erfolgt durch Ersetzen jedes Vorkommens der Variable x durch $(x-n)$. Dabei stellt n die Anzahl der Einheiten der Verschiebung dar. Verschiebung nach rechts: $n>0$, Verschiebung nach links: $n<0$.
Zur Spiegelung an der y-Achse bilde $f(-x)$.
Zur Spiegelung an der x-Achse bilde $-f(x)$.

a)	$p(x)=x^2$	|	Normalparabel
	$-p(x)=-x^2$	|	Spiegelung an der x-Achse
	$2\cdot\big(-p(x)\big)=-2x^2$	|	Streckung in y-Richtung
	$2\cdot\big(-p(x-1)\big)=-2(x-1)^2$	|	Verschiebung um eine Stelle nach rechts
	$f(x)=-2(x-1)^2$	|	endgültige Funktionsgleichung
	$f(x)=-2x^2+4x-2$	|	Hauptform der Funktionsgleichung
b)	$f(x)=-0{,}5(x-3)^2+1$	|	Scheitelform
	$f(x)=-0{,}5x^2+3x-3{,}5$	|	Hauptform
c)	$f(x)=-0{,}25(x+1)^2-2$	|	Scheitelform
	$f(x)=-0{,}25x^2-0{,}5x-2{,}25$	|	Hauptform

Lösung A2

Lösungshilfe:

Lies zunächst den Scheitelpunkt ab, stelle die Öffnung fest (nach oben geöffnet, nach unten geöffnet).
Ausgehend vom Scheitel bestimme den Streckungsfaktor stelle die Scheitelform auf.
Mache eine Punktprobe mit dem Punkt P.

Detaillierte Lösung für a)

$S(1\|2)$	|	abgelesen
Parabel nach unten geöffnet => $a<0$		
Parabel mit Faktor $k=0{,}5$ gestreckt.	|	abgelesen
$f(x)=-0{,}5(x-1)^2+2$	|	Scheitelform
$P(3\|0)$	|	abgelesen
$0=-0{,}5(3-1)^2+2$	|	Punktprobe mit $P(3\|0)$
$0=-0{,}5\cdot 4+2=0$	|	wahre Aussage
$f(x)=-0{,}5x^2+x+1{,}5$	|	Hauptform

b)	$S(1\|-1)$; $k=3$ nach oben $P(0\|2)$	|	abgelesen
	$f(x)=3(x-1)^2-1$	|	Scheitelform
	$2=3(0-1)^2-1$	|	Punktprobe mit $P(0\|2)$
	$2=3\cdot 1-1=2$	|	wahre Aussage
	$f(x)=3x^2-6x+2$	|	Hauptform

c) $S(1|-1);\ k=\frac{1}{4}$ nach oben $P(-1|0)$ | abgelesen

$f(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2-1$ | Scheitelform

$0=\frac{1}{4}(-1-1)^2-1$ | Punktprobe mit $P(-1|0)$

$0=\frac{1}{4}\cdot 4-1=0$ | wahre Aussage

$f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ | Hauptform

Lösung A3

Lösungshilfe:

Lies zunächst den Scheitelpunkt ab, stelle die Öffnung fest (nach oben geöffnet, nach unten geöffnet).
Ausgehend vom Scheitel bestimme den Streckungsfaktor stelle die Scheitelform auf und entscheide dann, welche Funktion du zuordnest.

blaue Grafik:

$S(2|0);\ k=\frac{1}{2}$

$p_{blau}(x)=\frac{1}{2}\cdot(x-2)^2$

rote Grafik:

$S=(1|1{,}5);\ k=-1$

$p_{rot}(x)=-(x-1)^2+1{,}5$

grüne Grafik:

$S=(-1|-1);\ k=1$

$p_{grün}(x)=(x+1)^2-1$

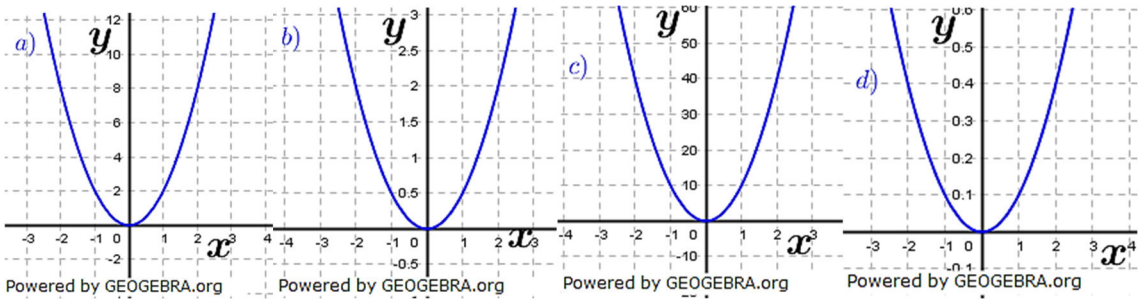
Zuordnungen:

$p_{blau}(x)=g(x)$ mit $c=\frac{1}{2}$ und $d=2$

$p_{rot}(x)=f(x)$ mit $a=1$ und $b=1{,}5$

$p_{grün}(x)=h(x)$ mit $k=-1$ und $e=-1$

Lösung A4



a) $p(x)=2x^2$ b) $p(x)=0{,}5x^2$ c) $p(x)=10x^2$ d) $p(x)=0{,}1x^2$

Lösung A5

Lösungshilfe:

Die Scheitelform der Parabel lautet $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$. Somit kannst du den Scheitel aus den gegebenen Funktionsgleichungen entnehmen.
Ist $a > 0$, ist die Parabel nach oben geöffnet, ist $a < 0$, ist sie nach unten geöffnet.

Detaillierte Lösung für a)

$f(x) = -(x-1)^2 + 2$
$a = -1;\ x_S = 1;\ y_S = 2$
$S(1|2)$ nach unten geöffnet.

b) $S(-1|-1)$ nach oben
c) $S(3|0)$ nach oben
d) $S(-4|6)$ nach unten
e) $S(-6|0)$ nach oben
f) $S(0|-2{,}5)$ nach oben
g) $S(0|-1)$ nach unten
h) $S(2|-\sqrt{5})$ nach oben
i) $S(-\frac{\pi}{2}|-\frac{3}{4}\pi)$ nach oben
j) $S(-\sqrt{2}|-30)$ nach oben
k) $S(\sqrt{6}|\sqrt{2})$ nach unten
l) $S(-1{,}8|-e)$ nach oben

Lösung A6

Bilde die Scheitelform aus der Hauptform mithilfe der quadratischen Ergänzung.

Detaillierte Lösung für a)

$f(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 - 1 + 2 = (x+1)^2 + 1$

b) $f(x) = -(x-2)^2 + 3$
c) $f(x) = (x-3)^2 - 5$
d) $f(x) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$
e) $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$
f) $f(x) = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$
g) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{3}{2}$
h) $f(x) = \frac{3}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{5}{3}$
i) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - 0{,}5$

Level 1 – Grundlagen – Blatt 3

Dokument mit 38 Aufgaben

Aufgabe A1

Eine Parabel hat ihren Scheitel in S und geht durch P. Bestimme den zugehörigen Funktionsterm in der Scheitelform und in der Hauptform.

a) $S(2|2);\ P(1|1)$ b) $S(-3|6);\ P(0|1)$ c) $S(4|-7);\ P(3|-6)$

Aufgabe A2

Gegeben sind Hauptformen quadratischer Gleichungen. Darunter sind Karten mit der Nullstellenform von Funktionsgleichungen abgebildet.
Finde zu den Gleichungen a) bis f) die passende Lösungskarte und bilde aus den Buchstaben ein Lösungswort.

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 15$ b) $f(x) = 2x^2 - 5x - 42$ c) $f(x) = 3x^2 - 4x - 4$
d) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ e) $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$ f) $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$

I $f(x) = 3(x-2)\left(x+\frac{2}{3}\right)$

T $f(x) = 3(x-2)^2$

G $f(x) = 2(x-2)(x+3)$

E $f(x) = -(x+5)(x-3)$

N $f(x) = 3(x-1)^2$

A $f(x) = 2(x-6)(x-3)$

W $f(x) = -(x-2)(x-3)$

N $f(x) = 2(x-6)(x+3{,}5)$

Aufgabe A3

Schreibe den Funktionsterm in der Produktform und lies die Nullstellen ab, ohne zu rechnen.

a) $f(x) = x^2 - 4x$ b) $f(x) = -x^2 + 2x$ c) $f(x) = -2x^2 + 6x$
d) $f(x) = x^2 - 36$ e) $f(x) = 2x^2 - 50$ f) $f(x) = -0{,}5x^2 + 8$
g) $f(x) = x^2 - 8x + 16$ h) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ i) $f(x) = -0{,}5x^2 + 5x - 12{,}5$

Aufgabe A4

Gegeben ist die quadratische Funktion f. In welchen Bereichen sind die Funktionswerte positiv?

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-3)$ b) $f(x) = -2(x+3)(x-5)$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$
d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ e) $f(x) = -x^2 - 3x + 4$ f) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2{,}5$

Aufgabe A5

Berechne die Nullstellen der Funktion f exakt.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 4$ b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 2$ c) $f(x) = 0{,}5x^2 - 5x + 12{,}5$

Aufgabe A6

Schreibe den Funktionsterm in Produktform, gib die Nullstellen ohne Rechnung an und bestimme den Scheitelpunkt.

a) $f(x) = -x^2 + 3x$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4{,}5$ c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$

Level 1 – Grundlagen – Blatt 3

Aufgabe A7

Skizziere den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = -2x^2 + 16x - 24$.
Bestimme den Bereich, in denen der Graph positive Funktionswerte hat.

Aufgabe A8

Der Graph einer quadratischen Funktion f schneidet die x-Achse in x_1 und x_2 und geht durch P. Bestimme den Funktionsterm.

a) $x_1 = 1;\ x_2 = 4$ und $P(3|1)$ b) $x_1 = -2;\ x_2 = 1$ und $P(2|8)$

c) $x_1 = -1;\ x_2 = 4$ und $P(1|6)$

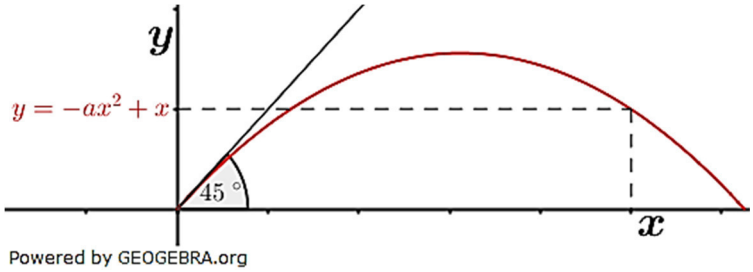
Aufgabe A9

Für welche Werte von t hat die Funktion f genau eine Nullstelle? Wie muss t gewählt werden, damit es zwei (keine) Nullstellen gibt?

a) $f(x) = x^2 - 8x + t$ b) $f(x) = -x^2 - 6x + t$ c) $f(x) = -2x^2 - 4x + t$

Aufgabe A10

In einem Fußballspiel wird der Fußball mit $25\frac{m}{s}$ unter einem Winkel von $45°$ schräg nach oben geschossen. Die parabelförmige Flugbahn kann mit der quadratischen Funktion f mit $f(x) = -0{,}016x^2 + x$ beschrieben werden.



Wo erreicht der Ball den höchsten Punkt, wo kommt er wieder auf dem Boden auf?

Lösung A1

Lösungshilfe:
Stelle die Scheitelform auf mit $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ und mache damit eine Punktprobe mit P zur Bestimmung von a.

Detaillierte Lösung für

a) $S(2|2);\quad P(1|1)$

$f(x) = a(x-2)^2 + 2$ | Scheitelform
$1 = a(1-2)^2 + 2$ | Punktprobe mit P
$1 = a + 2$ | -2
$a = -1$
$f(x) = -(x-2)^2 + 2$ | Scheitelform

b) $S(-3|6);\quad P(0|1)$

$f(x) = -\frac{5}{9}(x+3)^2 + 6$

c) $S(4|-7);\quad P(3|-6)$

$f(x) = (x-4)^2 - 7$

Lösung A2

Lösungshilfe:
Versuche den Lösungsansatz durch Feststellung, welche der gegebenen Produktformen zu welchem absoluten Glied c der Hauptform führen.

Detaillierte Lösung für a)

$f(x) = -x^2 + 2x + 15$
$c = 15$
$3 \cdot 5 = 15; (-3) \cdot (-5) = 15$
Nur das Ausmultiplizieren der Karte **E** führt zu $c = 15$.

Wir gehören zusammen:

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 15$

b) $f(x) = 2x^2 - 5x - 42$

c) $f(x) = 3x^2 - 4x - 4$

d) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$

e) $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$

f) $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$

E $f(x) = -(x+5)(x-3)$

N $f(x) = 2(x-6)(x+3{,}5)$

I $f(x) = 3(x-2)\left(x+\frac{2}{3}\right)$

W $f(x) = -(x-2)(x-3)$

G $f(x) = 2(x-2)(x+3)$

N $f(x) = 3(x-1)^2$

Das Lösungswort lautet „**GEWINN**".

Lösung A3

Lösungshilfe:

Stelle die Produktformel durch Ausklammern auf und ermittle daraus die Nullstellen.

Detaillierte Lösung für a)

$f(x) = x^2 - 4x = x(x-4)$

$x(x-4) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0; \quad x_2 = 4$

$N_1(0|0); \quad N_2(4|0)$

b) $f(x) = -x^2 + 2x = x(-x+2)$
$N_1(0|0); \quad N_2(2|0)$

c) $f(x) = -2x^2 + 6x = -2x(x-6)$
$N_1(0|0); \quad N_2(6|0)$

d) $f(x) = x^2 - 36$
$N_1(-6|0); \quad N_2(6|0)$

e) $f(x) = 2x^2 - 50 = 2(x^2 - 25)$
$N_1(-5|0); \quad N_2(5|0)$

f) $f(x) = -0{,}5x^2 + 8 = -0{,}5(x^2 - 16)$
$N_1(-4|0); \quad N_2(4|0)$

g) $f(x) = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$
$N_1(4|0)$ doppelte Nullstelle.

h) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$
$N_1(1|0)$ doppelte Nullstelle.

i) $f(x) = -0{,}5x^2 + 5x - 12{,}5 = -0{,}5(x-5)^2$
$N_1(5|0)$ doppelte Nullstelle.

Lösung A4

Lösungshilfe:

Bestimme die Nullstellen von und ermittle daraus den/die Bereich(e), in denen $f(x) > 0$ ist.

Ist die Parabel nach oben geöffnet, sind die y-Werte im Intervall von $-\infty$ bis zur linken Nullstelle, bzw. von der rechten Nullstelle bis $+\infty$ positiv.

Ist die Parabel nach unten geöffnet, sind die y-Werte im Intervall von der linken Nullstelle bis zur rechten Nullstelle positiv.

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-3)$
$N_1(1|0); \quad N_2(3|0)$
Parabel ist nach oben geöffnet:
$f(x) > 0$ für $-\infty \leq x < 1 \vee 3 < x \leq \infty$

b) $f(x) = -2(x+3)(x-5); \quad N_1(-3|0); \quad N_2(5|0)$
Parabel nach unten geöffnet:
$f(x) > 0$ für $-3 < x < 5$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8; \quad N_1(-4|0); \quad N_2(4|0)$
Parabel nach oben geöffnet:
$f(x) > 0$ für $-\infty \leq x < -4 \vee 4 < x \leq \infty$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x; \quad N_1(0|0); \quad N_2(6|0)$
Parabel ist nach oben geöffnet:
$f(x) > 0$ für $-\infty \leq x < 0 \vee 6 < x \leq \infty$

e) $f(x) = -x^2 - 3x + 4 \quad N_1(-4|0); \quad N_2(1|0)$
Parabel nach unten geöffnet:
$f(x) > 0$ für $-4 < x < 1$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2{,}5 \quad N_1(1|0); \quad N_2(5|0)$
Parabel nach oben geöffnet:
$f(x) > 0$ für $-\infty \leq x < 1 \vee 5 < x \leq \infty$

Lösung A5

Lösungshilfe:

Nullstellen berechnest du mithilfe der sogenannten Mitternachtsformel. Du kannst hierfür sowohl die p/q-Formel als auch die abc-Formel verwenden. In diesem Portal wird ausschließlich die p/q-Formel verwendet.
Bei Verwendung der p/q-Formel musst du darauf achten, dass der Koeffizient von x^2 unbedingt 1 ist. Hierfür kannst du jederzeit durch Division der Gleichung mit dem eventuell vorhandenen Koeffizienten von x^2 sorgen.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 4$
$x^2 - 2x - 4 = 0$
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+4}$
$x_1 = 1 + \sqrt{5};\quad x_2 = 1 - \sqrt{5}$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 2$
$-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 2 = 0 \qquad | \quad \cdot -(4)$
$x^2 - 8x + 8 = 0$
$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-8}$
$x_1 = 4 + 2 \cdot \sqrt{2};\quad x_2 = 4 - 2 \cdot \sqrt{2}$

c) $f(x) = 0{,}5x^2 - 5x + 12{,}5$
$0{,}5x^2 - 5x + 12{,}5 = 0 \qquad | \quad \cdot 2$
$x^2 - 10x + 25 = 0$
$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-25}$
$x_1 = 5$

Lösung A6

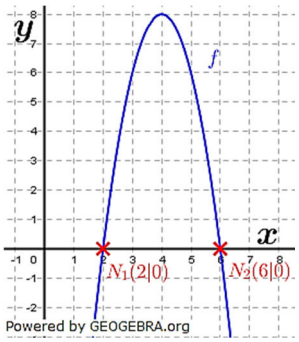
a) $f(x) = -x^2 + 3x = -x(x-3)$
$N_1(0|0);\ N_2(3|0) \Rightarrow\ x_S = 1{,}5$
$f(1{,}5) = -1{,}5^2 + 3 \cdot 1{,}5 = -2{,}25 + 4{,}5 = 2{,}25$
$S(1{,}5|2{,}25)$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4{,}5 = \frac{1}{2}(x+3)^2$
$N_1(-3|0)$, doppelte Nullstelle $\Rightarrow\ N_1 = S$

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$
$-\frac{1}{4}x^2 + 4 = 0$
$N_1(-4|0);\ N_2(4|0) \Rightarrow\ x_S = 0$
$f(0) = 4$
$S(0|4)$

Lösung A7

$f(x) = -2x^2 + 16x - 24.$
$-2x^2 + 16x - 24 = 0 \qquad | \quad :(-2)$
$x^2 - 8x + 12 = 0$
$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-12} = 4 \pm 2$
$x_1 = 6;\quad x_2 = 2$
Parabel nach oben geöffnet:
$f(x) > 0$ für $-\infty \leq x < 2 \ \vee\ 6 < x \leq \infty$



Lösung A8

Lösungshilfe:

Stelle die Nullstellenformel $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ mit x_1 und x_2 als Abszissenwerte der Nullstellen auf und mache dann eine Punktprobe mit P zur Berechnung von a.

a) $x_1 = 1;\ x_2 = 4$ und $P(3|1)$

$f(x) = a \cdot (x-1) \cdot (x-4)$ | Punktprobe mit $P(3|1)$

$1 = a \cdot (3-1) \cdot (3-4) = a \cdot 2 \cdot (-1) = -2a$

$a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1) \cdot (x-4)$

b) $x_1 = -2;\ x_2 = 1$ und $P(2|8)$

$f(x) = a \cdot (x+2) \cdot (x-1)$ | Punktprobe mit $P(2|8)$

$8 = a \cdot (2+2) \cdot (2-1) = a \cdot 4 \cdot 1 = 4a$

$a = 2$

$f(x) = 2(x+2) \cdot (x-1)$

c) $x_1 = -1;\ x_2 = 4$ und $P(1|6)$

$f(x) = a \cdot (x+1) \cdot (x-4)$ | Punktprobe mit $P(1|6)$

$6 = a \cdot (1+1) \cdot (1-4) = a \cdot 2 \cdot (-3) = -6a$

$a = -1$

$f(x) = -(x+1) \cdot (x-4)$

Lösung A9

Lösungshilfe:

Berechne die Nullstellen der Funktion mit der p/q-Formel (alternativ abc-Formel) in Abhängigkeit von t. Prüfe dann die Diskriminante. Führen Werte von t zu einer positiven Diskriminante, so hat der Graph der Funktion zwei Nullstellen. Führen Werte von t zu einer Diskriminante gleich Null, so hat der Graph der Funktion eine Nullstelle. Führen Werte von t zu einer negativen Diskriminante, so hat der Graph der Funktion keine Nullstelle.

a) $f(x) = x^2 - 8x + t$

$x^2 - 8x + t = 0$

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - t}$ | p/q-Formel

$t = 16$ => eine Nullstelle

$t < 16$ => zwei Nullstellen

$t > 16$ => keine Nullstellen

b) $f(x) = -x^2 - 6x + t$

$-x^2 - 6x + t$

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + t}$ | p/q-Formel

$t = -9$ => eine Nullstelle

$t < -9$ => keine Nullstellen

$t > -9$ => zwei Nullstellen

c) $f(x) = -2x^2 - 4x + t$

$-2x^2 - 4x + t = 0$

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + \frac{t}{2}}$ | p/q-Formel

$t = -8$ => eine Nullstelle

$t < -8$ => zwei Nullstellen

$t > -8$ => keine Nullstellen

Lösung A10

Lösungshilfe:

Der höchste Punkt des Balls liegt im Scheitel des Graphen der Funktion.
Der Ball trifft in der rechten Nullstelle wieder auf dem Boden auf.

$f(x) = -0{,}016x^2 + x = x(-0{,}016x + 1)$

$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{1}{0{,}016} = 62{,}5$

$x_S = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{62{,}5 - 0}{2} = 31{,}25$

$y_S = f(31{,}25) = -0{,}016 \cdot 31{,}25^2 + 31{,}25 = 15{,}625$

Der Fußball erreicht eine Höhe von ca. $15{,}6\,m$ und trifft $62{,}5\,m$ weiter wirder auf dem Boden auf.

Level 1 – Grundlagen – Blatt 4

Dokument mit 38 Aufgaben

Aufgabe A1

Gib die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Graphen von f und g an.

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x$ und $g(x)=2x+2$

b) $f(x)=\frac{1}{4}x^2-3x$ und $g(x)=-x-4$

c) $f(x)=x^2+x-2$ und $g(x)=2x-3$

d) $f(x)=2x^2-4x+8$ und $g(x)=8x-10$

Aufgabe A2

Beschreibe die gegenseitige Lage der Graphen von f und g. Gib gegebenenfalls die gemeinsamen Punkte an.

a) $f(x)=5x^2+20x-60$ und $g(x)=-5x+10$

b) $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x$ und $g(x)=3x+4$

c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$ und $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$

d) $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}$ und $g(x)=\frac{1}{4}x-1$

Aufgabe A3

Zeige, dass die Gerade zur Funktion f eine Tangente an den Graphen der Funktion ist. Bestimme die Koordinaten des Berührpunktes und zeichne die Graphen.

a) $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+x-2$ $g(x)=-x+1$

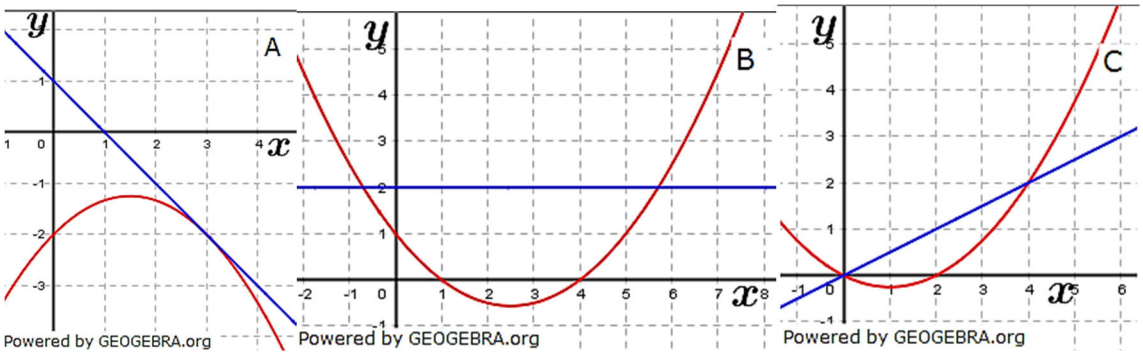
b) $f(x)=-2x^2+2x$ $g(x)=-2x+2$

c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3$ $g(x)=x+\frac{5}{2}$

Aufgabe A4

Ordne den Funktionstermen deren zugehörigen Graphen zu. Lies die Schnittpunkte bzw. den Berührpunkt ab und überprüfe deinen Vorschlag durch Rechnung.

a) $2=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x+1$ b) $-x+1=-\frac{1}{3}x^2+x-2$ c) $\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$



Aufgabe A5

Bestimme den Parameter der Geradengleichung so, dass die Gerade den Graphen von f berührt. Ermittle die Koordinaten des Berührpunktes.

a) $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ $g(x)=x+w$

b) $f(x)=4x^2+3x+2$ $g(x)=-3x+v$

c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ $g(x)=x+u$

Level 1 – Grundlagen – Blatt 4

Aufgabe A6

Der Graph der linearen Funktion g geht durch P und Q. Gib den Funktionsterm von an g und zeige, dass der Graph von g eine Tangente an den Graphen von f ist.

a) $P(2|70);\ Q(3|110)$
$f(x) = -5x^2 + 40x - 10$

b) $P(0|5);\ Q(5|0)$
$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x + 2$

c) $P(-2|14);\ Q(-1|6)$
$f(x) = 2x^2 - 8x - 2$

d) $P(1|-5);\ Q(3|3)$
$f(x) = x^2 - 5$

Aufgabe A7

Bestimme die Funktion f, deren Graph die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) K ist achsensymmetrisch und geht durch $P(-1|-2)$ und $Q(2|7)$.
b) K ist eine verschobene Normalparabel, die durch $P(2|-1)$ und $Q(-1|5)$.
c) K geht durch den Ursprung, schneidet die x-Achse bei $N(2|0)$ und verläuft durch $P(-1|-1{,}5)$.
d) K ist eine an der x-Achse gespiegelte, verschobene Normalparabel, die durch $P(1|6)$ und $Q(4|3)$ verläuft.
e) K verläuft durch die Punkte $P(0|2), Q(-1|-3)$ und $R(1|1)$.

Aufgabe A8

Der Graph einer quadratischen Funktion f geht durch den Punkt Q und schneidet die x-Achse in N_1 und N_2. Bestimme den Funktionsterm von f und gib diesen in der Hauptform an.

a) $Q(3|-2)$; $N_1(-1|0)$ und $N_2(2|0)$
b) $Q(2|-5)$; $N_1(-0{,}5|0)$ und $N_2(1|0)$
c) $Q(-1|4)$; $N_1(-2|0)$ und $N_2(3|0)$
d) $Q(3|6)$; $N_1(-1|0)$ und $N_2(-3|0)$

Aufgabe A9

Der Graph einer quadratischen Funktion f hat den Scheitel S und geht durch den Punkt P. Bestimme ihren Funktionsterm.

a) $S(2|1)$ und $P(4|3)$
b) $S(-1|-1)$ und $P(-3|-2)$
c) $S(-0{,}5|1{,}5)$ und $P(0{,}5|0{,}5)$

Aufgabe A10

Der Graph einer quadratischen Funktion f geht durch die folgenden Punkte. Bestimme mit einem passenden Ansatz einen Funktionsterm.

a) Scheitel $S(-6|3)$ und Punkt $P\left(-4\middle|\frac{5}{3}\right)$
b) Achsenschnittpunkte $N_1(-2|0)$, $N_2(6|0)$ und $R(0|-1{,}2)$

Aufgabe A11

Eine quadratische Funktion f hat bei $x_1 = -3$ und $x_2 = -1$ Nullstellen. Der größte Funktionswert beträgt 1. Bestimme den Funktionsterm.

Aufgabe A12

Der Graph einer quadratischen Funktion f ist symmetrisch zur y-Achse und geht durch die Punkte $P(0|5)$ und $Q(1|3)$. Bestimme den Funktionsterm.

Lösung A1

Lösungshilfe:
Gemeinsame Punkte sind Schnittpunkte bzw. Berührpunkte. Solche Punkte bestimmt man durch Gleichsetzung.
Da in dieser Aufgabe nur die Anzahl gemeinsamer Punkte gefragt ist, genügt es, den Wert der Diskriminante der sich ergebenden quadratischen Gleichung zu bestimmen.

Detaillierte Lösung für

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x$ und $g(x)=2x+2$

$f(x) \cap g(x)$

$\frac{1}{2}x^2+2x=2x+2 \quad | \quad -2x;$

$\frac{1}{2}x^2=2 \quad | \quad \cdot 2$

$x^2=4;\ x_{1,2}=\pm 2$

f und g haben zwei gemeinsame Punkte.

b) $\frac{1}{4}x^2-3x=-x-4 \quad | \quad +x;\ +4$

$\frac{1}{4}x^2-2x+4=0 \quad | \quad \cdot 4$

$x^2-8x+16=0$

$x_{1,2}=4\pm\sqrt{16-16}$

$D=0 \Rightarrow$ f und g haben einen gemeinsamen Punkt.

c) $x^2+x-2=2x-3 \quad | \quad -2x;\ +3$

$x^2-x+1=0 \quad | \quad :2$

$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-1}$

$D<0 \Rightarrow$ f und g haben keine gemeinsamen Punkte.

d) $2x^2-4x+8=8x-10 \quad | \quad +8x;\ -10$

$2x^2+4x-2=0 \quad | \quad :2$

$x^2+2x-1=0$

$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+1}$

$D>0 \Rightarrow$ f und g haben zwei gemeinsamen Punkte.

Lösung A2

Lösungshilfe:
Gegenseitige Lage können sein:
Passante: f und g haben keine gemeinsamen Punkte
Tangente: f und g haben einen gemeinsamen Punkt, sie berühren sich.
Sekante: f und g haben zwei gemeinsame Punkte, sie schneiden sich.
Gemeinsame Punkte sind Schnittpunkte bzw. Berührpunkte. Solche Punkte bestimmt man durch Gleichsetzung.

Detaillierte Lösung für

a) $f(x)=5x^2+20x-60$ und $g(x)=-5x+10$

$f(x) \cap g(x)$

$5x^2+20x-60=-5x+10 \quad | \quad +5x;\ -10$

$5x^2+25x-70=0 \quad | \quad :5$

$x^2+5x-14=0$

$x_{1,2}=-2{,}5\pm\sqrt{6{,}25+14}=-2{,}5\pm 5{,}5$

$D > 0$ => f und g haben zwei gemeinsame Punkte, g ist Sekante zu f.
$x_1 = 3;\ \ x_2 = -8$
$g(3) = -5 \cdot 3 + 10 = -5$
$g(-8) = -5 \cdot (-8) + 10 = 50$
Schnittpunkte sind $S_1(3|-5)$ und $S_2(-8|50)$.

b) $-\frac{1}{3}x^2 + 2x = 3x + 4 \quad | \quad -3x;\ -4$
$-\frac{1}{3}x^2 - x - 4 = 0 \quad | \quad \cdot(-3)$
$x^2 + 3x + 12 = 0$
$x_{1,2} = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 12}$
$D < 0$ => f und g haben keine gemeinsame Punkte, g ist Passante zu f.

c) $\frac{1}{2}x^2 - 2 = x - 2 \quad | \quad -x;\ +2$
$\frac{1}{2}x^2 - x = 0 \quad | \quad \cdot 2$
$x^2 - 2x = 0$
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1}$
$D > 0$ => f und g haben zwei gemeinsame Punkte, g ist Sekante zu f.
$x_1 = 2;\ \ x_2 = 0$
$g(2) = 2 - 2 = 0$
$g(0) = 0 - 2 = -2$
Schnittpunkte sind $S_1(2|0)$ und $S_2(0|-2)$.

d) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x - 1 \quad | \quad -\frac{1}{4}x;\ +1$
$-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} = 0 \quad | \quad \cdot(-4)$
$x^2 + x - 6 = 0$
$x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6} = -0{,}5 \pm 2{,}5$
$D > 0$ => f und g haben zwei gemeinsame Punkte, g ist Sekante zu f.
$x_1 = 2;\ \ x_2 = -3$
$g(2) = \frac{1}{4} \cdot 2 - 1 = -\frac{1}{2}$
$g(-3) = \frac{1}{4} \cdot (-3) - 1 = -\frac{7}{4}$
Schnittpunkte sind $S_1\left(2\middle|-\frac{1}{2}\right)$ und $S_2\left(-3\middle|-\frac{7}{4}\right)$.

Lösung A3

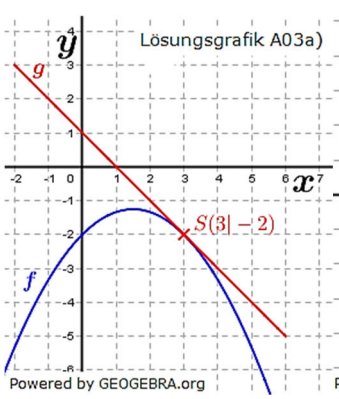
Lösungshilfe:
Hierzu müssen wir die Funktion f mit der Geraden gleichsetzen und nach x auflösen. Ist die Gerade eine Tangente an f, dann hat die entstehende quadratische Gleichung nur eine Lösung. Abschließend musst du noch die zugehörige y-Koordinate berechnen und dann die Graphen zeichnen.

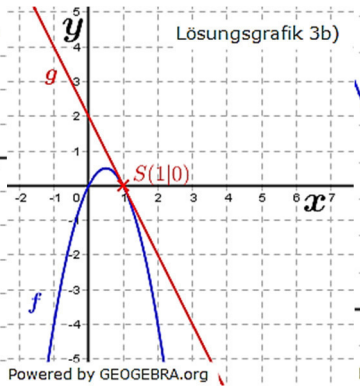
Detaillierte Lösung für

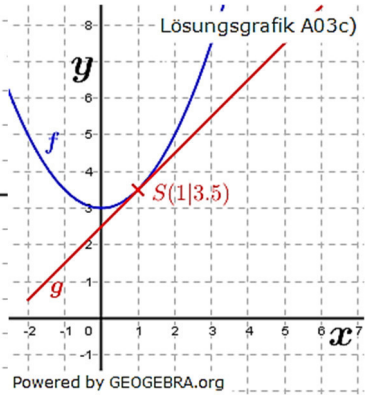
a) $f \cap g$
$-\frac{1}{3}x^2 + x - 2 = -x + 1 \quad | \quad +x - 1$
$-\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3 = 0 \quad | \quad \cdot(-3)$
$x^2 - 6x + 9 = 0$
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3$
$g(3) = -3 + 1 = -2$
$S(3|-2)$ ist Berührpunkt.

b) $-2x^2+2x=-2x+2$ | $+2x-2$
$-2x^2+4x-2=0$ | $:(-2)$
$x^2-2x+1=0$
$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-1}=1$
$g(1)=-2\cdot 1+2=0$
$S(1|0)$ ist Berührpunkt.

c) $\frac{1}{2}x^2+3=x+\frac{5}{2}$ | $-x-\frac{5}{2}$
$\frac{1}{2}x^2-x+0{,}5=0$ | $\cdot 2$
$x^2-2x+1=0$
$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-1}=1$
$g(1)=1+\frac{5}{2}=3{,}5$
$S(1|3{,}5)$ ist Berührpunkt.







Lösung A4

Lösungshilfe:

Die Darstellung $\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$ bedeutet, dass eine Gerade g mit $g(x)=\frac{1}{2}x$ mit der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$ geschnitten wird und daraus die Schnittpunkte der Graphen der beiden Funktionen ermittelt werden können.
Entsprechend dieser Darstellung können die Grafiken den Gleichungen zugeordnet werden.

a) $2=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x+1$
Die Gerade g mit $g(x)=2$ wird mit der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x+1$ geschnitten.
Der Funktionsterm gehört zur Grafik B.
Schnittpunkt $S(5{,}7|2)$:
$\frac{1}{4}\cdot 5{,}7^2-\frac{5}{4}\cdot 5{,}7+1=2$
$2=2$

b) $-x+1=-\frac{1}{3}x^2+x-2$
Die Gerade g mit $g(x)=-x+1$ wird mit der Funktion f mit $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+x-2$ geschnitten.
Der Funktionsterm gehört zur Grafik A.
Berührpunkt $B(3|-2)$:

$-3+1=-\frac{1}{3}\cdot 3^2+3-2$

$-2=-2$

c) $\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$

Die Gerade g mit $g(x)=\frac{1}{2}x$ wird mit der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$ geschnitten.

Der Funktionsterm gehört zur Grafik C.

Schnittpunkt $O(0|0)$:

$\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{4}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot 0$

$0=0$

Lösung A5

Lösungshilfe:

Wir müssen die Funktionsgleichungen der Geraden g mit der Funktionsgleichung der Parabel f gleichsetzen und den Funktionsterm nach x auflösen (Mitternachtsformel). In der Diskriminanten der Lösung befindet sich dann der Parameter, der so gesetzt werden muss, dass die Diskriminante den Wert 0 enthält.

a) $f \cap g$

$\frac{1}{4}x^2=x+w \quad | \quad -x-w$

$\frac{1}{4}x^2-x-w=0 \quad | \quad \cdot 4$

$x^2-4x-4w=0$

$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4+4w}$

$4+4w=0 \Rightarrow w=-1$

$f(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^2=1$

Für $w=-1$ berühren sich f und g in $B(2|1)$.

b) $f \cap g$

$4x^2+3x+2=-3x+v \quad | \quad +3x-v$

$4x^2+6x+2-v=0 \quad | \quad :4$

$x^2+\frac{3}{2}x+\frac{2-v}{4}=0$

$x_{1,2}=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{2-v}{4}}$

$\frac{9}{16}-\frac{2-v}{4}=0$

$9=8-4v$

$4v=-1 \Rightarrow v=-\frac{1}{4}$

$f\left(-\frac{3}{4}\right)=4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+2=2$

Für $v=-\frac{1}{4}$ berühren sich f und g in $B(-\frac{3}{4}|2)$.

c) $f \cap g$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = x + u$ | $-x-u$

$\frac{1}{2}x^2 - x - u + \frac{1}{2} = 0$ | $\cdot 2$

$x^2 - 2x - 2u + 1 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 2u - 1}$

$2u = 0 \Rightarrow u = 0$

$f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} = 1$

Für $u = 0$ berühren sich f und g in $B(1|1)$.

Lösung A6

Lösungshilfe:

Wir müssen die Funktionsgleichungen der Geraden g durch zwei Punkte aufstellen, indem wir zuerst die Steigung über $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ermitteln und dann mit einer Punktprobe das absolute Glied der Geradengleichung ermitteln.
Danach müssen wir die Geradengleichung mit der Funktionsgleichung der Parabel schneiden und nachweisen, dass es nur einen Schnittpunkt gibt, der ja dann ein Berührpunkt sein muss.

a) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{110 - 70}{3 - 2} = 40$

$g(x) = 40x + c$

$70 = 40 \cdot 2 + c$ | Punktprobe mit $P(2|70)$

$c = -10$

$g(x) = 40x - 10; \quad f(x) = -5x^2 + 40x - 10$

$f \cap g$

$-5x^2 + 40x - 10 = 40x - 10$ | $-40x + 10$

$-5x^2 = 0$

$x_1 = 0$

$g(0) = 0$

f und g berühren sich im Ursprung.

b) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 0}{0 - 5} = -1$

$g(x) = -x + c$

$0 = -5 + c$ | Punktprobe mit $P(5|0)$

$c = 5$

$g(x) = -x + 5; \quad f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x + 2$

$f \cap g$

$-\frac{1}{3}x^2 + x + 2 = -x + 5$ | $+x - 5$

$-\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3 = 0$ | $\cdot(-3)$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3$

$g(3) = -3 + 5 = 2$

f und g berühren sich in $B(3|2)$.

c) $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{14-6}{-2-(-1)}=-8$
$g(x)=-8x+c$
$14=-8\cdot(-2)+c$ | Punktprobe mit $P(-2|14)$
$c=-2$
$g(x)=-8x-2;\quad f(x)=2x^2-8x-2$
$f\cap g$
$2x^2-8x-2=-8x-2$ | $+8x+2$
$2x^2=0$ | $\cdot(-3)$
$x_1=0$
$g(0)=-2$
f und g berühren sich in $B(0|-2)$.

d) $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-(-5)}{3-1}=4$
$g(x)=4x+c$
$3=4\cdot 3+c$ | Punktprobe mit $P(3|3)$
$c=-9$
$g(x)=-4x-9;\quad f(x)=x^2-5$
$f\cap g$
$x^2-5=-4x-9$ | $+4x+9$
$x^2+4x+4=0$
$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$
$g(2)=4\cdot 2-9=-1$
f und g berühren sich in $B(2|-1)$.

Lösung A7

a) Achsensymmetrisch bedeutet, dass der Graph der Funktion in x-Richtung unverschoben ist, also gilt $f(x)=ax^2+c$.
(1) $a\cdot(-1)^2+c=-2$ | Punktprobe mit $P(-1|-2)$
(2) $a\cdot 2^2+c=7$ | Punktprobe mit $P(2|7)$
(1) $a+c=-2$
(2) $4a+c=7$
(1)-(2) $-3a=-9$ | $:(-3)$
$a=3$
$a\rightarrow(1)$
(1) $3+c=-2$
$c=-5$
$f(x)=3x^2-5$

b) Die Funktionsgleichung einer verschobenen Normalparabel lautet $f(x)=x^2+bx+c$.
(1) $2^2+2b+c=-1$ | Punktprobe mit $P(2|-1)$
(2) $(-1)^2-b+c=5$ | Punktprobe mit $P(-1|5)$
(1) $4+2b+c=-1$
(2) $1-b+c=5$
(1)-(2) $3+3b=-6$ | -3
$3b=-9$ | $:3$
$b=-3$
$b\rightarrow(1)$
(1) $4-2\cdot 3+c=-1$
$c=1$
$f(x)=x^2-3x+1$

c) Zwei Nullstellen $O(0|0)$ und $N(2|0)$ sind gegeben. Wir stellen die Produktformel mit $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ auf und machen eine Punktprobe mit $P(-1|-1{,}5)$ zur Errechnung von a.

$f(x) = a \cdot (x - 0) \cdot (x - 2)$.

$a \cdot (-1) \cdot (-1 - 2) = -1{,}5$ | Punktprobe mit $P(-1|-1{,}5)$

$3a = -1{,}5$ | $:3$

$a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}x \cdot (x - 2) = -\frac{1}{2}x^2 + x$

d) Die Funktionsgleichung einer an der x-Achse gespiegelten, verschobenen Normalparabel lautet:

$f(x) = -x^2 + bx + c$.

(1) $-1^2 + b + c = 6$ | Punktprobe mit $P(1|6)$

(2) $-4^2 + 4b + c = 3$ | Punktprobe mit $P(4|3)$

(1) $b + c = 7$

(2) $4b + c = 19$

(1)-(2) $-3b = -12$ | $:(-3)$

$b = 4$

$b \rightarrow (1)$

(1) $4 + c = 7$

$c = 3$

$f(x) = -x^2 + 4x + 3$

e) Allgemeine Parabel durch drei Punkte mit $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(1) $c = 2$ | Punktprobe mit $P(0|2)$

(2) $a - b + c = -3$ | Punktprobe mit $P(-1|-3)$

(3) $a + b + c = 1$ | Punktprobe mit $P(1|1)$

$c \rightarrow (1); (3)$

(2) $a - b = -5$

(3) $a + b = -1$

(2)+(3) $2a = -6$ | $:2$

$a = -3$

$a \rightarrow (2)$

(2) $-3 - b = -5$

$b = 2$

$f(x) = -3x^2 + 2x + 2$

Lösung A8

Lösungshilfe:

Gegeben sind zwei Nullstellen und ein weiterer Punkt. Wir stellen die Faktorengleichung (Nullstellengleichung) $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ der Parabel auf und machen mit dem gegebenen Punkt eine Punktprobe zur Ermittlung von a.

a) $x_1 = -1;\ x_2 = 2$ und $Q(3|-2)$

$f(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$

$-2 = a \cdot (3 + 1) \cdot (3 - 2) = 4a$ | Punktprobe mit $Q(3|-2)$

$a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1) \cdot (x - 2)$

b) $x_1 = -0{,}5;\ x_2 = 1$ und $Q(2|-5)$
$f(x) = a \cdot (x + 0{,}5) \cdot (x - 1)$
$-5 = a \cdot (2 + 0{,}5) \cdot (2 - 1) = 2{,}5a$ | Punktprobe mit $Q(2|-5)$
$a = -2$
$f(x) = -2(x + 0{,}5) \cdot (x - 1)$

c) $x_1 = -2;\ x_2 = 3$ und $P(-1|4)$
$f(x) = a \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$
$4 = a \cdot (-1 + 2) \cdot (-1 - 3) = -4a$ | Punktprobe mit $Q(-1|4)$
$a = -1$
$f(x) = -(x + 2) \cdot (x - 3)$

d) $x_1 = -1;\ x_2 = -3$ und $P(3|6)$
$f(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x + 3)$
$6 = a \cdot (3 + 1) \cdot (3 + 3) = 24a$ | Punktprobe mit $Q(3|6)$
$a = \frac{1}{4}$
$f(x) = \frac{1}{4}(x + 1) \cdot (x + 3)$

Lösung A9

Lösungshilfe:
Gegeben ist der Scheitel und ein weiterer Punkt. Wir stellen die Scheitelform $f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ der Parabel auf und machen mit dem gegebenen Punkt eine Punktprobe zur Ermittlung von a.

a) $S(2|1)$ und $P(4|3)$
$f(x) = a \cdot (x - 2)^2 + 1$
$3 = a \cdot (4 - 2)^2 + 1$ | Punktprobe mit $Q(4|3)$
$4a = 2$
$a = \frac{1}{2}$
$f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$

b) $S(-1|-1)$ und $P(-3|-2)$
$f(x) = a \cdot (x + 1)^2 - 1$
$-2 = a \cdot (-3 + 1)^2 - 1$ | Punktprobe mit $Q(-3|-2)$
$4a = -1$
$a = -\frac{1}{4}$
$f(x) = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 - 1$

c) $S(-0{,}5|1{,}5)$ und $P(0{,}5|0{,}5)$
$f(x) = a \cdot (x + 0{,}5)^2 + 1{,}5$
$0{,}5 = a \cdot (0{,}5 + 0{,}5)^2 + 1{,}5$ | Punktprobe mit $Q(0{,}5|0{,}5)$
$a = -1$
$f(x) = -(x + 0{,}5)^2 + 1{,}5$

Lösung A10

a) $S(-6|3)$ und $P\left(-4\left|\frac{5}{3}\right.\right)$

$f(x) = a \cdot (x+6)^2 + 3$

$\frac{5}{3} = a \cdot (-4+6)^2 + 3 = 4a + 3$ | Punktprobe mit $Q\left(-4\left|\frac{5}{3}\right.\right)$

$a = -\frac{1}{3}$

$f(x) = -\frac{1}{3}(x+6)^2 + 3$

b) $N_1(-2|0)$; $N_2(6|0)$ und $P(0|-1{,}2)$

$f(x) = a \cdot (x+2) \cdot (x-6)$

$-1{,}2 = a \cdot 2 \cdot (-6) = -12a$ | Punktprobe mit $Q(0|-1{,}2)$

$a = 0{,}1$

$f(x) = 0{,}1(x+2)(x-6)$

Lösung A11

Lösungshilfe:

Gegeben sind zwei Nullstellen und ein maximaler Funktionswert (y-Wert) 1. Wir müssen hierzu zunächst noch den x-Wert des maximalen Funktionswertes bestimmen. Aus Symmetriegründen liegt dieser x-Wert in der Mitte der beiden Nullstellen. Damit ist der Scheitel bekannt.

$f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$

$f(x) = a \cdot (x+1)(x+3)$

$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1-3}{2} = -2$

Scheitelpunkt $S(-2|1)$

$1 = a \cdot (-2+1)(1+3) - 4a$ | Punktprobe mit $S(-2|1)$

$a = -\frac{1}{4}$

$f(x) = -\frac{1}{4}(x+1)(x+3)$

Lösung A12

Lösungshilfe:

Eine achsensymmetrische Parabel ist in x-Richtung unverschoben, hat somit die Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + c$. Wir machen mit den gegebenen Punkten eine Punktprobe und lösen das Gleichungssystem nach a und c auf.

$f(x) = ax^2 + c$

(1) $5 = 0 + c$ | Punktprobe mit $P(0|5)$

(2) $3 = a + c$ | Punktprobe mit $Q(1|3)$

$c \rightarrow (2)$

(2) $3 = a + 5$

$a = -2$

$f(x) = -2x^2 + 5$

Level 1 – Grundlagen – Blatt 5

Dokument mit 40 Aufgaben

Aufgabe A1

Gib an, welche Punkte auf der Normalparabel $y = x^2$ liegen:

$A(2|2)$ $B(2|4)$ $C(-3|6)$ $D(-4|16)$ $E(-1|-1)$

Aufgabe A2

Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $y = 5x^2$. Ergänze die Koordinaten so, dass die Punkte auf der Parabel liegen.
Eventuell gibt es zwei Lösungen.

$A(1\|\dots)$	....
$B\left(\frac{1}{2}\middle\|\dots\right)$	....
$C(\dots\|0)$	....
$D(\dots\|20)$	....

Aufgabe A3

Gib den Scheitel der Parabel an:

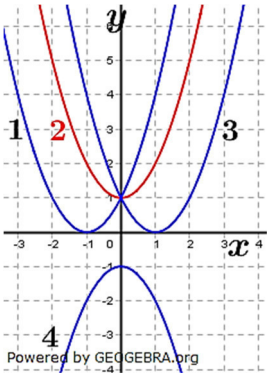
$A: f(x) = x^2 - 2$ $B: f(x) = 2x^2$
$C: f(x) = (x-2)^2$ $D: f(x) = 2x^2 - 3$
$E: f(x) = -x^2$ $F: f(x) = -(x^2 + 3)$

$A: S(\dots|\dots)$ $B: S(\dots|\dots)$
$C: S(\dots|\dots)$ $D: S(\dots|\dots)$
$E: S(\dots|\dots)$ $E: S(\dots|\dots)$

Aufgabe A4

Ordne jedem Graphen die richtige Gleichung zu:

$A: f(x) = x^2 + 1$
$B: f(x) = x^2 - 1$
$C: f(x) = (x-1)^2$
$D: f(x) = (x+1)^2$
$E: f(x) = -x^2 - 1$
$F: f(x) = -(x-1)^2$
$G: f(x) = -(x+1)^2$



1. _____
2. _____
3. _____
4. _____

Aufgabe A5

Gib die Gleichung der verschobenen Normalparabel an :

a) Die Parabel ist um 5 Einheiten auf der y-Achse nach unten verschoben.
b) Die Parabel ist um 3,75 Einheiten in positive x-Richtung verschoben.
c) Die Parabel ist an der x-Achse gespiegelt und anschließend um eine Einheit in positive y-Richtung verschoben worden.

a) $f(x) =$_____
b) $f(x) =$_____
c) $f(x) =$_____

Level 1 – Grundlagen – Blatt 5

Aufgabe A6

Gib den Scheitel der Parabel an :

A: $f(x) = (x-5)^2 + 6$

B: $f(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2{,}5$

C: $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x-4)^2 + \sqrt{2}$

A: $S(\quad | \quad)$
B: $S(\quad | \quad)$
C: $S(\quad | \quad)$

Aufgabe A7

S ist der Scheitel einer verschobenen Normalparabel. Gib die Gleichung des Graphen in Scheitelform an:

a) $S(-2|3)$ b) $S(5|12)$ c) $S(\sqrt{10}|-8)$

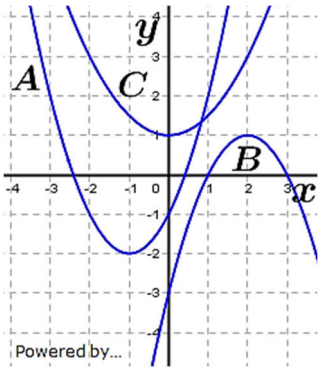
a) $f(x) =$_____

b) $f(x) =$_____

c) $f(x) =$_____

Aufgabe A8

Gib die Gleichung der Parabel in Scheitelform und in Normalform an.



A: $f(x) =$_____
$f(x) =$_____

B: $f(x) =$_____
$f(x) =$_____

C: $f(x) =$_____
$f(x) =$_____

Aufgabe A9

Die Normalparabel mit $f(x) = x^2$ wird so verschoben, dass ihr Scheitel in $S(17|124)$ liegt.
Ergänze die fehlenden Koordinaten so, dass die Punkte auf der verschobenen Parabel liegen. Prüfe jeweils, ob es zwei Lösungen gibt.

$A(19|\ldots.)$, $A(19|.\ldots)$

$B(16|\ldots.)$, $B(16|\ldots.)$

$C(\ldots.|133)$, $C(\ldots.|133)$

Aufgabe A10

a) Berechne die Nullstellen der Funktion mit $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

b) Eine Parabel schneidet die x-Achse in $P(-2|0)$ und $Q(1|0)$.
Welche x-Koordinate hat der Scheitel?

a) $x_1 =$ ____ $x_2 = \ldots\ldots$

b) $x = \ldots\ldots$

Level 1 – Grundlagen – Blatt 5

Aufgabe A11

Berechne die Scheitelkoordinaten der Parabel. Ist der Scheitel der höchste oder der tiefste Punkt der Parabel?

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $f(x) = -x^2 - x + 6$.

a) $S(\ldots.|\ldots.)$

b) $S(\ldots.|\ldots.)$

Aufgabe A12

Bestimme den Scheitel S der Parabel mit der Gleichung $f(x) = 1{,}2x^2 - 0{,}5x - 0{,}125$ und ihre Schnittpunkte P und Q mit der x-Achse.

$S(\ldots.|\ldots.)$

$P(\ldots.|\ldots.)$ $\quad Q(\ldots.|\ldots.)$

Lösung A1

Punktproben entscheiden, ob er Punkt auf der Parabel liegt oder nicht.

Für $A(2|2)$: $2 \neq 2^2 = 4 \Rightarrow A \notin y = x^2$
Für $B(2|4)$: $4 = 2^2 = 4 \Rightarrow B \in y = x^2$
Für $C(-3|6)$: $6 \neq (-3)^2 = 9 \Rightarrow C \notin y = x^2$
Für $D(-4|16)$: $16 = (-4)^2 = 16 \Rightarrow D \in y = x^2$
Für $E(-4|1)$: $1 = (-1)^2 = 1 \Rightarrow E \in y = x^2$

Lösung A2

Einsetzen von oder in die Gleichung ergibt Lösung.
Beispiel für A: $y = 5 \cdot 1^2 = 5$.

$A(1\|5)$	nur ein Wert
$B\left(\frac{1}{2}\middle\|\frac{5}{4}\right)$	nur ein Wert
$C(0\|0)$	nur ein Wert
$D_1(2\|20)$	$D_2(-2\|20)$

Lösung A3

Gib den Scheitel der Parabel an:

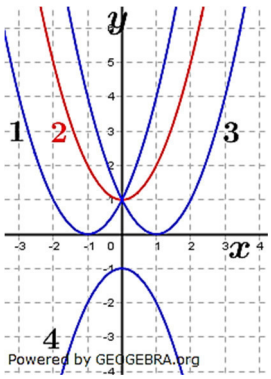
$A: f(x) = x^2 - 2$ $\quad$ $B: f(x) = 2x^2$
$C: f(x) = (x-2)^2$ $\quad$ $D: f(x) = 2x^2 - 3$
$E: f(x) = -x^2$ $\quad$ $F: f(x) = -(x^2 + 3)$

$A: S(0\|-2)$	$B: S(0\|0)$
$C: S(2\|0)$	$D: S(0\|-3)$
$E: S(0\|0)$	$E: S(-3\|0)$

Lösung A4

Ordne jedem Graphen die richtige Gleichung zu:

$A: f(x) = x^2 + 1$
$B: f(x) = x^2 - 1$
$C: f(x) = (x-1)^2$
$D: f(x) = (x+1)^2$
$E: f(x) = -x^2 - 1$
$F: f(x) = -(x-1)^2$
$G: f(x) = -(x+1)^2$



1. $f(x) = (x+1)^2$
2. $f(x) = x^2 + 1$
3. $f(x) = (x-1)^2$
4. $f(x) = -x^2 - 1$

Lösung A5

Gib die Gleichung der verschobenen Normalparabel an :

a) Die Parabel ist um 5 Einheiten auf der y-Achse nach unten verschoben.
b) Die Parabel ist um $3{,}75$ Einheiten in positive x-Richtung verschoben.
c) Die Parabel ist an der x-Achse gespiegelt und anschießend um eine Einheit in positive y-Richtung verschoben worden.

a) $f(x) = x^2 - 5$
b) $f(x) = (x - 3{,}75)^2$
c) $f(x) = -x^2 + 1$

Lösung A6

Gib den Scheitel der Parabel an :

A: $f(x) = (x-5)^2 + 6$

B: $f(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2{,}5$

C: $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x-4)^2 + \sqrt{2}$

A: $S(5 \mid 6)$

B: $S\left(-\frac{1}{2} \middle| -2{,}5\right)$

C: $S(4 \mid \sqrt{2})$

Lösung A7

S ist der Scheitel einer verschobenen Normalparabel. Gib die Gleichung des Graphen in Scheitelform an:

a) $S(-2|3)$ b) $S(5|12)$ c) $S(\sqrt{10}|-8)$

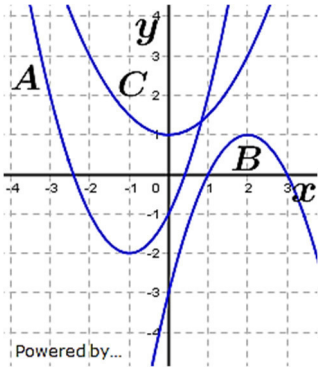
a) $f(x) = (x+2)^2 + 3$

b) $f(x) = (x-5)^2 + 12$

c) $f(x) = \left(x - \sqrt{10}\right)^2 - 8$

Lösung A8

Gib die Gleichung der Parabel in Scheitelform und in Normalform an.



A: $f(x) = (x+1)^2 - 2$
$f(x) = x^2 + 2x - 1$

B: $f(x) = -(x-2)^2 + 1$
$f(x) = -x^2 + 4x - 3$

C: $f(x) = \frac{1}{2}(x-0)^2 + 1$
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$

Lösung A9

Die Normalparabel mit $f(x) = x^2$ wird so verschoben, dass ihr Scheitel in $S(17|124)$ liegt.
Ergänze die fehlenden Koordinaten so, dass die Punkte auf der verschobenen Parabel liegen. Prüfe jeweils, ob es zwei Lösungen gibt.

$A(19|128)$ nur ein Wert

$B(16|125)$ nur ein Wert

$C(20|133)$, $C(-20|133)$

Lösung A10

a) Berechne die Nullstellen der Funktion mit $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

b) Eine Parabel schneidet die x-Achse in $P(-2|0)$ und $Q(1|0)$.
Welche x-Koordinate hat der Scheitel?

a) $x_1 = 3$ $x_2 = 1$

b) $x = -0{,}5$

Lösung A11

Berechne die Scheitelkoordinaten der Parabel. Ist der Scheitel der höchste oder der tiefste Punkt der Parabel?

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $f(x) = -x^2 - x + 6.$

a) $S(1|-4)$
tiefster Punkt

b) $S(-\frac{1}{2}|\frac{25}{4})$
höchster Punkt

Lösung A12

Bestimme den Scheitel S der Parabel mit der Gleichung $f(x) = 1{,}2x^2 - 0{,}5x - 0{,}125$ und ihre Schnittpunkte P und Q mit der x-Achse.

$S(0{,}2083|-0{,}177)$

$P(0{,}5923|0)$ $Q(-0{,}176|0)$

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Dokument mit 26 Aufgaben

Aufgabe A1

Bestimme die Gleichung der Parabel, wenn folgendes bekannt ist:

a) Die Parabel verläuft durch die Punkte $P_1(1|2{,}5)$, $P_2(-2|1)$ und $P_3(0|3)$.

b) Für die Funktion f der Parabel gilt $f(2) = -1$, $f(-1) = 0{,}5$ und $f(4) = 3$.

c) Die Parabel schneidet die y–Achse in $P_y(0|4)$, die x–Achse in $N_1(-2|0)$ und die erste Winkelhalbierende in $x = 2$.

d) Die Parabel verläuft durch die Punkte $P_1(1|-3{,}5)$, $P_2(2|-4)$ und $P_3(4|-8)$.

Aufgabe A2

Für eine quadratische f Funktion gilt $f(2) = 0$ und $f(0) = 4$. Welche Eigenschaft hat das Schaubild von f. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm.

Aufgabe A3

Ein parabelförmiger Tunnel ist $6\,m$ breit und $4{,}5\,m$ hoch. Es soll ein $2{,}5\,m$ breiter Transporter durchfahren. Der Fahrer weiß, dass sein Transporter $3{,}20\,m$ hoch ist.

a) Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und Skizziere den Tunnel.

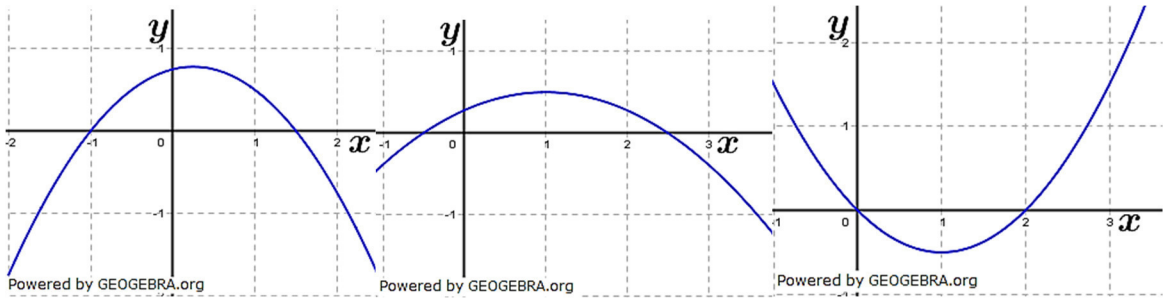
b) Bestimme eine passende Funktionsvorschrift, die den Tunnelbogen beschreibt.

c) Wird der Fahrer ohne Gegenverkehr durch den Tunnel fahren können?

d) Welcher Sicherheitsabstand braucht der Fahrer vom rechten Fahrbahnrand?

Aufgabe A4

Bestimme einen passenden Funktionsterm zu den abgebildeten Parabeln.



Aufgabe A5

Der Graph einer quadratischen Funktion geht durch die gegebenen Punkte. Bestimme der Funktionsterm.

a) $A(-1|2)$; $B(2|1)$ und $C(4|-13)$

b) $A(1|5{,}5)$; $B(-2|-5)$ und $C(3|-5{,}5)$

c) $P(1|1)$; $Q(3|0)$ und $R(-2|-1{,}25)$

d) $V(1|1{,}5)$; $W(-1|-2{,}5)$ und $T(2|5)$

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Aufgabe A6

Der Graph einer quadratischen Funktion f geht durch die angegebenen Punkte. Bestimme den Funktionsterm von f und gib diesen in der Hauptform an.

a) Scheitel $S(2|7)$ und $A(5|-2)$
b) $N_1(2|0)$; $N_2(-1|0)$ und $B(5|-2)$
c) $S_y(0|2)$; $A(1|3)$ und $B(-1|-3)$
d) Scheitel $S(1|-0{,}5)$ und $S_y(0|-1)$

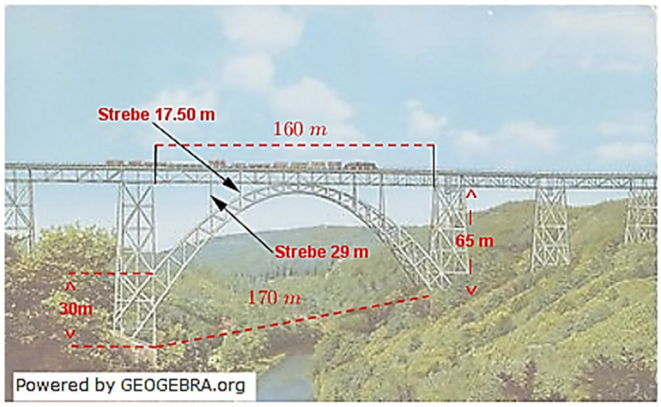
Aufgabe A7

Bestimme den Funktionsterm einer quadratischen Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) Der kleinste Funktionswert befindet sich bei $x = 5$ und hat den Wert 0.
Bei $x = 0$ ist ihr Wert 2.
b) Der größte Funktionswert befindet sich bei $x = -1$ und hat den Wert 3.
Bei $x = 1$ ist der Wert 1.
c) Die Nullstellen der Funktion befinden sich bei $x = 5$ und $x = 2$.
Der größte Funktionswert ist 3.

Aufgabe A8

Die höchste Eisenbahnbrücke in Deutschland ist die Münstener Brücke über die Wupper (bei Wuppertal). Die Breite des Bogens am unteren Fuß der Brücke beträgt $170\,m$, die beiden Pfeiler sind $85\,m$ hoch (siehe Grafik rechts) und $160\,m$ voneinander entfernt. Der obere Parabelbogen hat im Scheitel $5\,m$ Abstand vom unteren Bogen und ist auf $30\,m$ Höhe mit den Pfeilern verschweißt. Je zwei Streben mit $17{,}5\,m$ und $29\,m$ Länge verbinden die Schienentrasse mit dem unteren Parabelbogen.



a) Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und skizziere die beiden Parabelbögen mit den beiden Pfeilern.
b) Bestimme die beiden Funktionsterme.
c) Ermittle die Breite der Parabelbögen an den Stellen, an denen die Streben verankert sind.

Aufgabe A9

Bestimme drei Punkte, durch die man keine Parabel legen kann. Formuliere eine allgemeine Bedingung für die Lage von drei Punkten, sodass es keine Parabel durch diese Punkte gibt.

Aufgabe A10

Eine quadratische Funktion hat die Nullstellen -2 und 3 und den kleinsten Funktionswert -1. Bestimme den Funktionsterm.

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Lösung A1

Detaillierte Lösung für

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

Lineares Gleichungssystem:

(1) $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2{,}5$ | Punktprobe mit $P_1(1|2{,}5)$

(2) $a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 1$ | Punktprobe mit $P_2(-2|1)$

(3) $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3$ | Punktprobe mit $P_3(0|3)$

$c \rightarrow (1); (2)$

(1) $a + b + 3 = 2{,}5$ | $-3;\ \cdot 2$

(2) $4a - 2b + 3 = 1$ | -3

(1) $2a + 2b = -1$

(2) $4a - 2b = -2$

(1)+(2) $6a = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$a \rightarrow (1)$

(1) $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2b = -1$

$-1 + 2b = -1 \Rightarrow b = 0$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

b) Punktinterpretation:

$f(2) = -1 \Rightarrow P(2|-1)$ $\quad f(-1) = 0{,}5 \Rightarrow Q(-1|0{,}5)$

$f(4) = 3 \Rightarrow R(4|3)$

Lineares Gleichungssystem:

(1) $4a + 2b + c = -1$ | Punktprobe mit $P(2|-1)$

(2) $a - b + c = 0{,}5$ | Punktprobe mit $Q(-1|0{,}5)$

(3) $16a + 4b + c = 3$ | Punktprobe mit $R(4|3)$

Die Auflösung des linearen Gleichungssystems führt zu

$a = \frac{1}{2};\ \ b = -1;\ \ c = -1$

Die Funktionsgleichung lautet:

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$

	$4a + 2b + c = -1$		
solve	$a - b + c = 0.5$	for	a, b, c
	$16a + 4b + c = 3$		

Result:

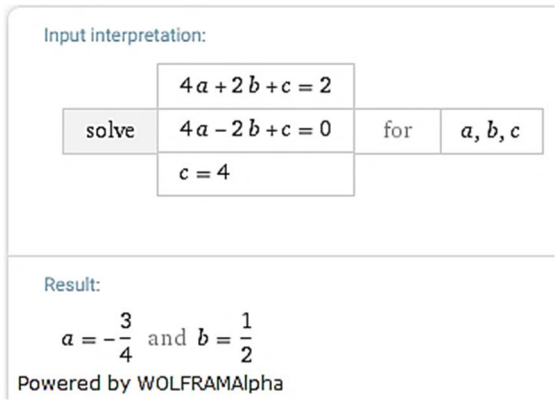
$a = \frac{1}{2}$ and $b = -1$ and $c = -1$

Powered by WOLFRAMAlpha

c) Gegeben $P_y(0|4)$ sowie $N_1(-2|0)$
Die Angabe „die erste Winkelhalbierende in $x = 2$" führt zu $Q(2|2)$, denn die erste Winkelhalbierende hat die Funktionsgleichung $w_1(x) = x$, somit ist $w_1(2) = 2$.
Lineares Gleichungssystem:

(1) $4a + 2b + c = 2$ | Punktprobe mit $Q(2|2)$
(2) $4a - 2b + c = 0$ | Punktprobe mit $N_1(-2|0)$
(3) $c = 4$ | Punktprobe mit $P_y(0|4)$

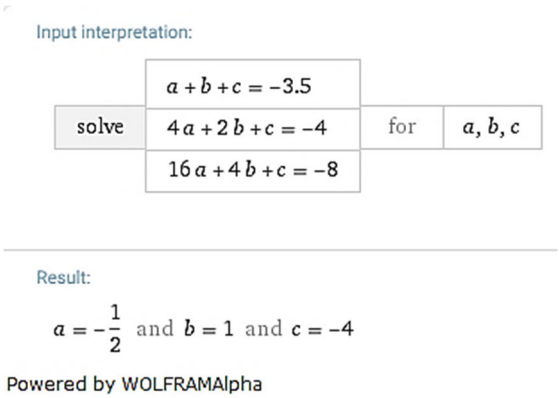
Die Auflösung des linearen Gleichungssystems führt zu
$a = -\frac{3}{4}; \quad b = \frac{1}{2}; \quad c = 4$
Die Funktionsgleichung lautet:
$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 4$



d) $f(x) = ax^2 + bx + c$
Lineares Gleichungssystem:

(1) $a + b + c = -3{,}5$ | Punktprobe mit $P(1|-3{,}5)$
(2) $4a + 2b + c = -4$ | Punktprobe mit $Q(2|-4)$
(3) $16a + 4b + c = -8$ | Punktprobe mit $R(4|-8)$

Die Auflösung des linearen Gleichungssystems führt zu
$a = -\frac{1}{2}; \quad b = 1; \quad c = -4$
Die Funktionsgleichung lautet:
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 4$



Lösung A2

Der Aufgabentext beschreibt mit $f(2) = 0$ und $f(0) = 4$ zwei Punkte $N_1(2|0)$ (Nullstelle) sowie $S_y(0|4)$ (Schnittpunkt mit der y-Achse).
Wir bestimmen $S_y(0|4)$ als Scheitelpunkt und die y-Achse zur Symmetrieachse. Dadurch entsteht eine weitere Nullstelle $N_2(-2|0)$.
$f(x) = ax^2 + 4$
$4a + 4 = 0$ | Punktprobe mit $N_1(2|0)$
$a = -1$
Eine mögliche Funktionsgleichung lautet $f(x) = -x^2 + 4$
(Andere Lösungen denkbar).

Lösung A3

Lösungshilfe:

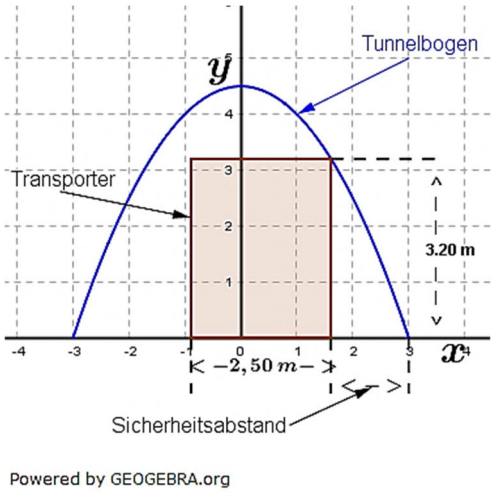
a) Wir legen die y-Achse in die „Mitte des Tunnels" und die x-Achse „auf den Boden". Die Höhe $4{,}5\,m$ des Tunnels wird dann zum Scheitelpunkt $S(0|4{,}5)$ einer nach unten geöffneten Parabel. Die Breite $6\,m$ des Tunnels bestimmt dann die beiden Nullstellen $N_1(-3|0)$ und $N_2(3|0)$. Mit diesen Festlegungen können wir die Form des Tunnels skizzieren.

b) Über die zuvor festgestellten Punkte lässt sich die Parabelgleichung aufstellen.

c) Wir prüfen, ob die rechte obere Ecke des Transporters tiefer ist als die Tunnelwand, wenn der Transporter links mit einen Minimalabstand zur Mittelline (Symmetrieachse) fährt.

d) Der Abstand vom rechten Fahrbahnrand ermittelt sich aus der Hälfte der Fahrbahnbreite und dem rechten Abstand des Transporters zur Fahrbahnmitte so, dass der rechte obere Eckpunkt des Transporters ein Punkt des Parabelbogens ist.

a) *Skizze*
siehe Grafik rechts.



b) Zwei Nullstellen $N_1(-3|0)$ und $N_2(3|0)$, Schnittpunkt mit der y-Achse ist $S_y(0|4{,}5)$.
Nullstellenform:
$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+3)(x-3) = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$

c) Höchster Funktionswert für Transporter ist $f(x) = 3{,}2$.
$-\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5 = 3{,}2$
$\frac{1}{2}x^2 = 1{,}3$
$x_{1,2} = \pm 1{,}14$
Rechte obere Ecke des Transporters ist $P(1{,}14|3{,}2)$.
Da der Transporter breiter ist als $1{,}14\,m$ kann der Fahrer nur ohne Gegenverkehr durch den Tunnel fahren, da die linke Fahrzeugseite über die Mittellinie der Straße hinausragt.

d) *Sicherheitsabstand zum rechten Straßenrand:*
Wie aus der Grafik ersichtlich beträgt der Sicherheitsabstand $s > 3 - 1{,}14 = 1{,}86\,m$.

Lösung A4

Linke Grafik: $N_1(-1|0)$; $N_2(1{,}5|0)$ und $S_y(0|0{,}75)$.

$f(x) = a(x+1)(x-1{,}5)$
$0{,}75 = a(0+1)(0-1{,}5) = -1{,}5a$
$a = -\frac{0{,}75}{1{,}5} = -\frac{1}{2}$
$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-1{,}5)$

Mittlere Grafik: $N_1(-0{,}5|0)$; $N_2(2{,}5|0)$ und $S_y(1|0{,}5)$.

$f(x) = a(x+0{,}5)(x-2{,}5)$

$0{,}5 = a(1+0{,}5)(1-2{,}5) = -1{,}25a$

$a = -\frac{0{,}5}{1{,}25} = -\frac{2}{9}$

$f(x) = -\frac{2}{9}(x+0{,}5)(x-2{,}5)$

Rechte Grafik: $N_1(0|0)$; $N_2(2|0)$ und $S_y(1|-0{,}5)$.

$f(x) = ax(x-2)$

$-0{,}5 = a(1-2) = -a$

$a = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2}x(x-2)$

Lösung A5

Detaillierte Lösung für

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

Lineares Gleichungssystem:

(1)	$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 2$	|	Punktprobe mit $A(-1\|2)$
(2)	$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 1$	|	Punktprobe mit $B(2\|1)$
(3)	$a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = -13$	|	Punktprobe mit $C(4\|-13)$
(1)	$a - b + c = 2$	|	
(2)	$4a + 2b + c = 1$	|	$(2) - (1) \cdot 4$
(3)	$16a + 4b + c = -13$	|	$(3) - (1) \cdot 16$
(1)	$a - b + c = 2$	|	
(2)	$0 + 6b - 3c = -7$	|	
(3)	$0 + 20b - 15c = -45$	|	$(3) \cdot 6 - (2) \cdot 20$
(1)	$a - b + c = 2$		
(2)	$0 + 6b - 3c = -7$		
(3)	$0 + 0 - 30c = -130$		

$-30c = -130 \Rightarrow \quad c = \frac{13}{3}$

$6b - 3 \cdot \frac{13}{3} = -7$

$6b = 6 \Rightarrow \quad b = 1$

$a - 1 + \frac{13}{3} = 2 \Rightarrow \quad c = -\frac{4}{3}$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + x + \frac{13}{3}$

b) Lineares Gleichungssystem:

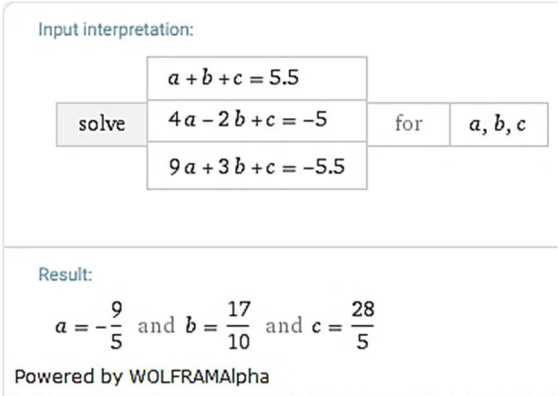
(1)	$a + b + c = 5{,}5$	|	Punktprobe mit $A(1\|5{,}5)$
(2)	$4a - 2b + c = -5$	|	Punktprobe mit $B(-2\|-5)$
(3)	$9a + 3b + c = -5{,}5$	|	Punktprobe mit $C(3\|-5{,}5)$

Die Auflösung des linearen Gleichungssystems führt zu

$a = -\frac{9}{5}; \quad b = \frac{17}{20}; \quad c = \frac{28}{5}$

Die Funktionsgleichung lautet:

$f(x) = -\frac{9}{5}x^2 + \frac{17}{20}x + \frac{28}{5}$



c) Lineares Gleichungssystem:

(1) $a+b+c=1$ | Punktprobe mit $P(1|1)$

(2) $9a+3b+c=0$ | Punktprobe mit $Q(3|0)$

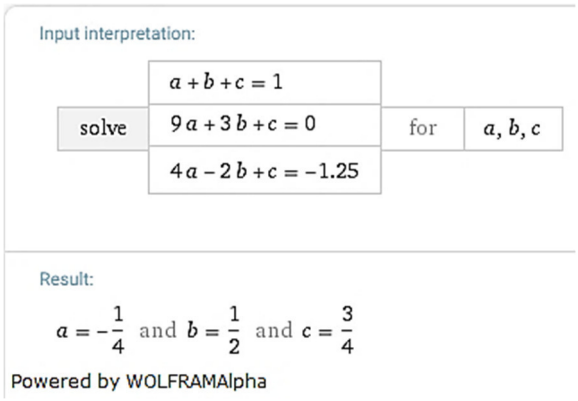
(3) $4a-2b+c=-1{,}25$ | Punktprobe mit $R(-2|-1{,}25)$

Die Auflösung des linearen Gleichungssystems führt zu

$a=-\frac{9}{5};\quad b=\frac{17}{20};\quad c=\frac{28}{5}$

Die Funktionsgleichung lautet:

$f(x)=-\frac{9}{5}x^2+\frac{17}{20}x+\frac{28}{5}$



d) Lineares Gleichungssystem:

(1) $a+b+c=1{,}5$ | Punktprobe mit $V(1|1{,}5)$

(2) $a-b+c=-2{,}5$ | Punktprobe mit $W(-1|-2{,}5)$

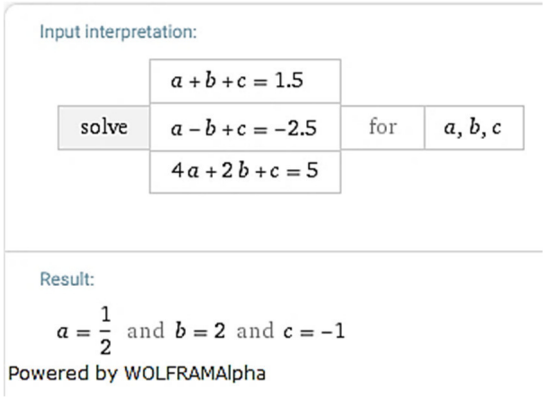
(3) $4a+2b+c=5$ | Punktprobe mit $T(2|5)$

Die Auflösung des linearen Gleichungssystems führt zu

$a=\frac{1}{2};\quad b=2;\quad c=-1$

Die Funktionsgleichung lautet:

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-1$



Lösung A6

a) Scheitel $S(2|7)$ und $A(5|-2)$

$f(x)=a(x-x_S)^2+y_S$ | Scheitelform

$f(x)=a(x-2)^2+7$

$-2=a(5-2)^2+7=9a+7$ | Punktprobe mit $A(5|-2)$

$9a=-9;\ a=-1$

$f(x)=-(x-2)^2+7$ | Scheitelform

$f(x)=-x^2+4x+3$ | Hauptform

b) $N_1(2|0);\ N_2(-1|0)$ und $B(5|-2)$

$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ | Nullstellenform

$f(x)=a(x-2)(x+1)$

$-2=a(5-2)(5+1)=18a$ | Punktprobe mit $B(5|-2)$

$a=-\frac{1}{9}$

$f(x)=-\frac{1}{9}(x-2)(x+1)$ | Nullstellenform

$f(x)=-\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{2}{9}$ | Hauptform

c) $S_y(0|2)$; $A(1|3)$ und $B(-1|-3)$

Lineares Gleichungssystem:

(1) $c = 2$ | Punktprobe mit $S_y(0|2)$

(2) $a + b + c = 3$ | Punktprobe mit $A(1|3)$

(3) $a - b + c = -3$ | Punktprobe mit $B(-1|-3)$

$c \to (1); (2)$

(2) $a + b + 2 = 3$

(3) $a - b + 2 = -3$

(2) $a + b = 1$

(3) $a - b = -5$

(2)+(3) $2a = -4$

$a = -2$

$a \to (2)$

(2) $-2 + b = 1$

$b = 3$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$

d) Scheitel $S(1|-0{,}5)$ und $S_y(0|-1)$

$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ | Scheitelform

$f(x) = a(x - 1)^2 - 0{,}5$

$-1 = a(0 - 1)^2 - 0{,}5 = a - 0{,}5$ | Punktprobe mit $S_y(0|-1)$

$a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 - 0{,}5$ | Scheitelform

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$ | Hauptform

Lösung A7

Lösungshilfe:

Aus den Texten heraus müssen wir Bedingungen für das Aufstellen der Funktionsgleichungen herauslesen.

a) Der Text nennt uns einen Scheitel $S(5|0)$ sowie einen weiteren Punkt $P(0|2)$.

b) Der Text nennt uns einen Scheitel $S(-1|3)$ sowie einen weiteren Punkt $P(1|1)$.

c) Der Text nennt uns zwei Nullstellen $N_1(5|0)$ und $N_2(2|0)$ sowie den y-Wert des Scheitels $S(x_S|3)$.

a) Scheitel $S(5|0)$ und $P(0|2)$

$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ | Scheitelform

$f(x) = a(x - 5)^2$

$2 = a(0 - 5)^2 = 25a$ | Punktprobe mit $P(0|2)$

$a = \frac{2}{25}$

$f(x) = \frac{2}{25}(x - 5)^2$ | Scheitelform

$f(x) = \frac{2}{25}x^2 - \frac{4}{5}x + 2$ | Hauptform

b) Scheitel $S(-1|3)$ und $P(1|1)$

$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ | Scheitelform

$f(x) = a(x + 1)^2 + 3$

$1 = a(1 + 1)^2 + 3 = 4a + 3$ | Punktprobe mit $P(1|1)$

$a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 3$ | Scheitelform

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}$ | Hauptform

c) Nullstellen $N_1(5|0)$ und $N_2(2|0)$ sowie den y-Wert des Scheitels $S(x_S|3)$.
Die Symmetrieachse liegt in der Mitte der beiden Nullstellen:
$x_S = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$. Somit hat der Scheitel die Koordinaten $S(1{,}5|3)$

$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ | Scheitelform

$f(x) = a(x - 1{,}5)^2 + 3$

$0 = a(2 - 1{,}5)^2 + 3 = 0{,}25a + 3$ | Punktprobe mit $N_2(2|0)$

$a = -12$

$f(x) = -12(x - 1{,}5)^2 + 3$ | Scheitelform

$f(x) = -12x^2 + 36x - 24$ | Hauptform

Lösung A8

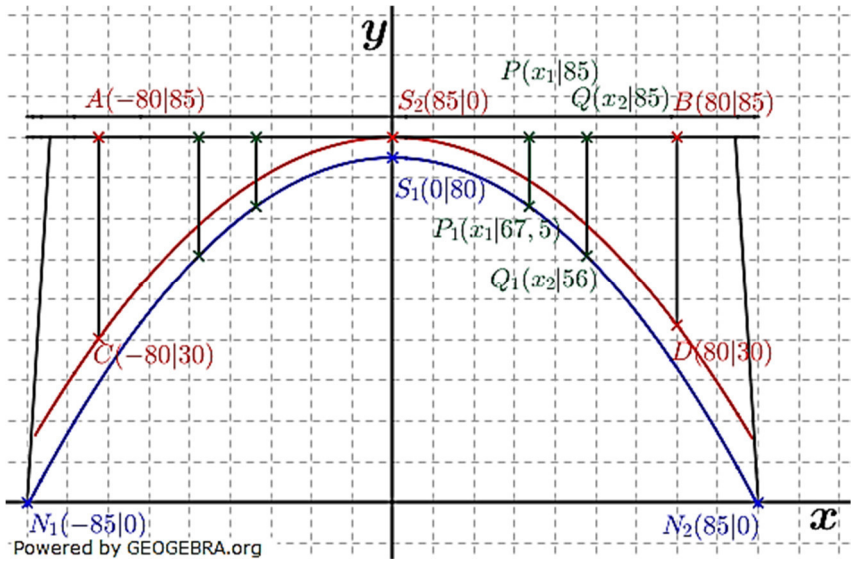
Lösungshilfe:

a) Das Koordinatensystem:
Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der Scheitel des oberen und unteren Parabelbogens der Brücke auf der y-Achse zu liegen kommt. Die x-Achse legen wir in durch die Fußpunkte des rechten und linken Pfeilers. Die Einteilung der Achsen erfolgt in jeweils einer Einheit für $10\,m$.

b) Aus der Skizze ergeben sich die einzelnen Punkte, gegeben sind jeweils der Scheitelpunkt und ein weiterer Punkt der Parabeln.

c) Für die Breite zwischen den Streben ergeben sich die Fußpunkte der Streben zum unteren Parabelbogen. Wir berechnen dann, an welchen x-Stellen eine der Parabeln den zugehörigen y-Wert besitzt. Über diese Stellen bestimmt sich dann die Breite.

a) Skizze der Situation (Koordinatenangaben in m)



b) Unterer Parabelbogen p_1:
Scheitel $S_1(0|80)$, Nullstelle $N_2(85|0)$
Scheitelform: $p_1(x) = ax^2 + 80$
$0 = a \cdot 85^2 + 80$
$a = -\frac{80}{85^2} = -0{,}011$
$p_1(x) = -0{,}011x^2 + 80$

Oberer Parabelbogen p_2:
Scheitel $S_1(0|85)$, weiterer Punkt $D(80|30)$
Scheitelform: $p_2(x) = ax^2 + 85$
$30 = a \cdot 80^2 + 85$
$a = -\frac{55}{80^2} = -0{,}0086$
$p_2(x) = -0{,}00086x^2 + 85$

c) Berechnung von x_1 für P_1 (kurze Strebe):
$p_1(x_1) = 67{,}5$
$-0{,}011x^2 + 80 = 67{,}5$
$0{,}011x^2 = 12{,}5$
$x^2 = \frac{12{,}5}{0{,}011} = 1136{,}36$
$x_{1,2} = \pm 33{,}7$
Breite Parabelbogen kurze Strebe:
$b_1 = 2 \cdot x_1 = 2 \cdot 33{,}7 = 67{,}4\,m$

Berechnung von x_2 für Q_1 (lange Strebe):
$p_1(x_2) = 56$
$-0{,}011x^2 + 80 = 56$
$0{,}011x^2 = 24$
$x^2 = \frac{24}{0{,}011} = 2181{,}81$
$x_{1,2} = \pm 46{,}7$
Breite Parabelbogen lange Strebe:
$b_2 = 2 \cdot x_1 = 2 \cdot 46{,}7 = 93{,}4\,m$

Lösung A9

Drei Punkte, durch die man keine Parabel legen kann:
$P_1(0|0);\ P_2(1|1);\ P_3(2|2)$ (andere Lösungen möglich)
Allgemeine Bedingung:
Liegen drei beliebige Punkte auf einer Geraden, so kann man durch diese Punkte keine Parabel legen.

Lösung A10

Gegeben $N_1(-2|0)$ und $N_2(3|0)$
Symmetrieachse bei $x_S = \frac{x_{N_2} - x_{N_1}}{2} = \frac{3-(-2)}{2} = 2{,}5$
Scheitel somit $S(2{,}5|-1)$
$f(x) = a \cdot (x - 2{,}5)^2 - 1$ | Scheitelform
$0 = a \cdot (3 - 2{,}5)^2 - 1 = 0{,}25a - 1$ | Punktprobe mit $N_2(3|0)$
$a = 4$
$f(x) = 4(x - 2{,}5)^2 - 1 = 4x^2 - 20x + 5{,}25$

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2
Dokument mit 26 Aufgaben

Aufgabe A1

Der Wasserstrahl eines Springbrunnens hat eine Höhe von $6\,m$ und eine Weite von $6\,m$. Martin hat Lust unter dem Wasserstrahl durchzulaufen.

a) Wähle ein geeigneters Koordinatensystem und skizziere den Wasserstrahl.
b) Bestimme den zugehörigen Funktionsterm.
c) Martin ist $1{,}38\,m$ groß. Wie weit darf er sich zur Düse hinbewegen, ohne nass zu werden?

Aufgabe A2

Bestimme die Gleichung der Parabel, wenn folgendes bekannt ist:

a) Die Parabel berührt die x–Achse in $x = -36$ und verläuft durch $A(-5|-7)$.
b) Die Parabel schneidet die x–Achse in 2 und -1 und verläuft durch $A(1|-2)$.
c) Eine verschobene Normalparabel berührt die x–Achse bei $x = -2$.
d) Die Parabel verläuft symmetrisch zur y–Achse durch die Punkte $A(1|0{,}5)$ und $B(-2|-5{,}5)$.

Aufgabe A3

Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel, wenn folgendes bekannt ist:

a) Die Parabel berührt die x–Achse in $x = -3$ und verläuft durch $A(-5|-7)$.
b) Die Parabel schneidet die x–Achse in -2 und 1 und verläuft durch $A(-1|2)$.
c) Eine verschobene Normalparabel berührt die x–Achse bei $x = 2$.
d) Die Parabel verläuft symmetrisch zur y–Achse durch die Punkte $A(-1|-0{,}5)$ und $B(2|5{,}5)$.

Aufgabe A4

Für eine quadratische Funktion f gilt $f(-2) = 3 = f(2)$.
Welche Eigenschaft hat das Schaubild von f?
Bestimme einen Funktionsterm. Ist der Graph von f festgelegt, wenn der Graph die Form einer Normalparabel hat?

Aufgabe A5

Eine Parabel hat den Scheitel $S(1|4)$ und verläuft durch den Ursprung. Bestimme die Parabelgleichung.

Aufgabe A6

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 + bx + c$. Mache Aussagen über b und c, wenn gilt:

a) f hat eine Nullstelle in $x = 0$.
b) Die Nullstellen von f unterscheiden sich nur im Vorzeichen.

Aufgabe A7

Für eine quadratische Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ gilt $f(0) = 5$ und $f(1) = 2$. Welche Beziehung besteht zwischen a und b? Bestimme a und b, wenn $x = 3$ Nullstelle von f ist.

Aufgabe A8

Gib jeweils zwei Funktionsterme von verschiedenen quadratischen Funktionen an, deren Schaubilder

a) keinen Schnittpunkt mit der x–Achse haben.
b) zwei Schnittpunkte mit der x–Achse haben.
c) den Scheitel $S(-2|0)$ besitzen.

Aufgabe A9

Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = ax^2 + bx + 3$ und $g(x) = 2x - 1$.
Die Funktionswerte von f und g stimmen in $x = -1$ und $x = 0{,}5$ überein.
Bestimme a und b.

Aufgabe A10

Eine Parabel 2. Ordnung schneidet die x–Achse in -5 und 5. Die zugehörige Funktion ist damit nicht eindeutig bestimmt.
Gib die Funktionsterme von zwei möglichen Funktionen an.
Zeige, dass die Schaubilder symmetrisch zur y–Achse sind.

Aufgabe A11

Das Schaubild einer quadratischen Funktion f geht durch die Punkte $P(-2|1)$, $Q(-4|4)$ und $R(6|9)$. Bestimme $f(x)$.

Aufgabe A12

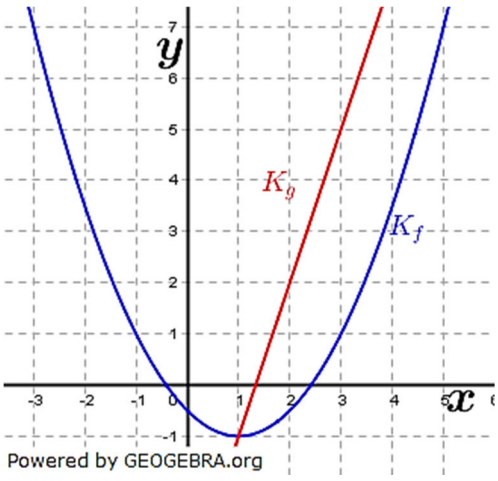
Skizziere das Schaubild K der Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2; x \in \mathbb{R}$ in ein geeignetes Koordinatensystem und kennzeichne die markanten Punkte.
Welche Punkte auf K haben vom Ursprung einen Abstand von 3?
Welcher Zusammenhang besteht zwischen K und dem Graph von f aus Aufgabe 11?

Aufgabe A13

Eine Gerade g geht durch die Punkte $T_1(-1|-1{,}75)$ und $T_2(-4|-4)$.
Für welche Werte von x gilt: K aus Aufgabe 12 verläuft unterhalb von g?
Erläutere deinen Lösungsweg.

Aufgabe A14

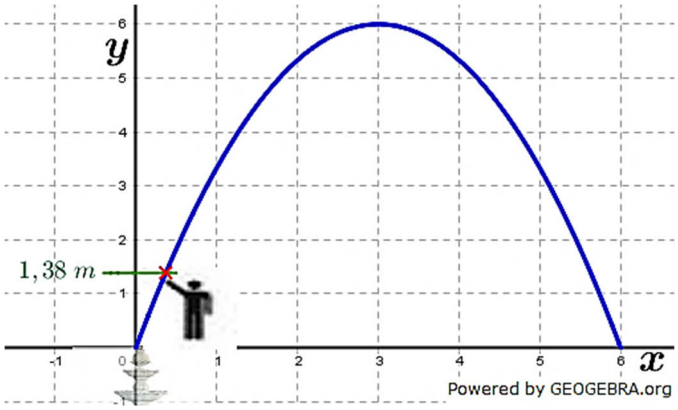
Die Abbildung zeigt den Graphen K_f einer quadratischen Funktion sowie K_g einer linearen Funktion.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K_f und K_g.



Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

Lösung A1

a) Skizze siehe Grafik rechts.



b) $N_1(0|0);\ N_2(6|0);\ S(3|6)$

$f(x) = ax \cdot (x-6)$

$6 = 3a \cdot (3-6)$

$9a = -6$

$a = -\frac{2}{3}$

$f(x) = -\frac{2}{3}x \cdot (x-6)$

$f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$

c) Wir suchen den -Wert der Parabel für $y = 1{,}38$.

$-\frac{2}{3}x^2 + 4x = 1{,}38$

$-\frac{2}{3}x^2 + 4x - 1{,}38 = 0$ | $\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$

$x^2 - 6x + 2{,}07 = 0$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 2{,}07} = 3 \pm 2{,}63$

$x_1 = 5{,}63;\ x_2 = 0{,}3675$

Wegen Aufgabenstellung „zur Düse hinbewegen" ist $x_2 = 0{,}3675$ die Lösung dieser Aufgabe.

Martin darf sich bis auf etwa 37 cm der Düse nähern, ohne nass zu werden.

Lösung A2

a) Berührpunkt mit der x-Achse ist doppelte Nullstelle: $N(-36|0)$, weiterer Punkt $A(-5|-4)$.

$f(x) = a \cdot (x+36)^2$ | doppelte Nullstelle

$-4 = a \cdot (-5+36)^2$ | Punktprobe mit $A(-5|-4)$

$-4 = 961a$

$a = -\frac{4}{961}$

$f(x) = -\frac{4}{961} \cdot (x+36)^2$

b) Zwei Nullstellen $N_1(2|0);\ N_2(-1|0)$ und weiterer Punkt $A(-5|-4)$.

$f(x) = a \cdot (x+1)(x-2)$ | Nullstellenform

$-4 = a \cdot (-5+1)(-5-2)$ | Punktprobe mit $A(-5|-4)$

$-4 = 28a$

$a = -\frac{1}{7}$

$f(x) = -\frac{1}{7}(x+1)(x-2)$

c) Normalparabel mit doppelte Nullstelle bei $N(-2|0)$.

$f(x) = (x+2)^2$ | Nullstellenform Normalparabel

$f(x) = x^2 + 4x + 4$ | Hauptform

d) Symmetrie mit y-Achse durch Punkte $A(1|0{,}5)$ und $B(-2|-5{,}5)$.

$f(x) = a \cdot x^2 + c$

$0{,}5 = a + c$ | Punktprobe mit $A(1|0{,}5)$

$-5{,}5 = 4a + c$ | Punktprobe mit $B(-2|-5{,}5)$

$-6 = -3a \Rightarrow a = 2$

$0{,}5 = 2 + c \Rightarrow c = -1{,}5$

$f(x) = 2x^2 - 1{,}5$

Lösung A3

a) Berührpunkt mit der x-Achse ist doppelte Nullstelle: $N(-3|0)$, weiterer Punkt $A(-5|-4)$.

$f(x) = a \cdot (x+3)^2$ | doppelte Nullstelle
$-4 = a \cdot (-5+3)^2$ | Punktprobe mit $A(-5|-4)$
$-4 = a$
$a = 1$
$f(x) = (x+3)^2) = x^2 + 6x + 9$

b) Zwei Nullstellen $N_1(-2|0)$; $N_2(1|0)$ und weiterer Punkt $A(-1|2)$.

$f(x) = a \cdot (x+2)(x-1)$ | Nullstellenform
$2 = a \cdot (-1+2)(-1-1)$ | Punktprobe mit $A(-1|2)$
$2 = -2a$
$a = -1$
$f(x) = -(x+2)(x-1)$

c) Normalparabel mit doppelte Nullstelle bei $N(2|0)$.

$f(x) = (x-2)^2$ | Nullstellenform Normalparabel
$f(x) = x^2 - 4x + 4$ | Hauptform

d) Symmetrie mit y-Achse durch Punkte $A(-1|-0{,}5)$ und $B(2|5{,}5)$.

$f(x) = a \cdot x^2 + c$
$-0{,}5 = a + c$ | Punktprobe mit $A(1|0{,}5)$
$5{,}5 = 4a + c$ | Punktprobe mit $B(-2|-5{,}5)$
$6 = 3a \Rightarrow a = 2$
$-0{,}5 = 2 + c \Rightarrow c = -2{,}5$
$f(x) = 2x^2 - 2{,}5$

Lösung A4

Die Angabe $f(-2) = 3 = f(2)$ sagt aus, dass der Graph der Funktion symmetrisch zur y-Achse ist. Dabei kann er sowohl nach oben als auch nach unten geöffnet sein.

Funktionsgleichung:
$f(x) = a \cdot x^2 + c$
$-0{,}5 = a + c$ | Punktprobe mit $A(2|3)$
$3 = 4a + c$
$c = 3 - 4a$
$f(x) = a \cdot x^2 + 3 - 4a$
$f(x) = a \cdot (x^2 - 4) + 3$

$f(x)$ als Normalparabel:
Bei der Normalparabel ist $|a| = 1$:
$f(x) = x^2 - 1$, alternativ $f(x) = -x^2 + 7$

Lösung A5

Gegeben ist der Scheitelpunkt $S(1|4)$ und als weiterer Punkt der Ursprung $O(0|0)$.

$f(x) = a \cdot (x-1)^2 + 4$ | Scheitelform
$0 = a \cdot (0-1)^2 + 4$ | Punktprobe mit $O(0|0)$
$a = -4$
$f(x) = -4 \cdot (x-1)^2 + 4$
$f(x) = -4x^2 + 8x$ | Hauptform

Lösung A6

$f(x) = x^2 + bx + c$

Die Graphen der Parabeln sind Normalparabeln.

a) f hat eine Nullstelle in $x = 0$.
In diesem Falle ist $c = 0$ (y-Achsenabschnitt).

b) Die Nullstellen von f unterscheiden sich nur im Vorzeichen.
In diesem Falle ist der Graph der Funktion symmetrisch zur y-Achse. Dadurch ist $b = 0$.

Lösung A7

Gegeben ist $f(x) = ax^2 + bx + c$ sowie die zwei Punkte $P(0|5)$ und $Q(1|2)$.

Beziehung zwischen a und b:

$5 = c$ | Punktprobe mit $P(0|5)$
$2 = a + b + 5$ | Punktprobe mit $Q(1|2)$
$a = -3 - b$
$a = -(b + 3)$

a und b, wenn $x = 3$ Nullstelle von f ist:

Zusatzpunkt $N(3|0)$
$0 = 9a + 3b + 5$ | Punktprobe mit $N(3|0)$
$9a = -3b - 5$
$a = -\left(\frac{1}{3}b + \frac{5}{9}\right)$
$-(b + 3) = -\left(\frac{1}{3}b + \frac{5}{9}\right)$ | Gleichsetzung der beiden a.
$b - \frac{1}{3}b = \frac{5}{9} - 3$
$\frac{2}{3}b = -\frac{22}{9}$
$b = -\frac{66}{18} = -\frac{11}{3}$
$a = -\left(-\frac{11}{3} + 3\right)$
$a = \frac{2}{3}$
$f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{3}x + 5$

Lösung A8

a) Keine Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f_1(x) = x^2 + 1$; $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3$

b) Zwei Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f_1(x) = x^2 - 1$; $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

c) Mit Scheitel $S(-2|0)$:
$f_1(x) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$; $f_2(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$

Lösung A9

Lösungshilfe

Aus dem Text heraus müssen wir interpretieren, dass sich f und g schneiden, nämlich in $x_1 = -1$ und $x_2 = 0{,}5$. Da die Funktionsgleichung von g vollständig gegeben ist, können wir die zugehörigen y-Werte errechnen.
Damit haben wir zwei Punkte der Parabel. Durch Punktproben können wir dann a und b ermitteln.

f schneidet g in $P\big(-1\big|g(-1)\big)$ und $P\big(0{,}5\big|g(0{,}5)\big)$.
$g(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3 \;\Rightarrow\; P(-1|-3)$
$g(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; Q(0{,}5|0)$

(1)	$a - b + 3 = -3$	|	Punktprobe mit $P(-1\|-3)$
(2)	$0{,}25a + 0{,}5b + 3 = 0$	|	Punktprobe mit $Q(0{,}5\|0)$
(1)	$a - b + 3 = -3$		
(2)	$0{,}25a + 0{,}5b + 3 = 0$	|	$\cdot 2$
(1)	$a - b + 3 = -3$		
(2)	$0{,}5a + b + 6 = 0$	|	$\cdot 2$
(1)+(2)	$1{,}5a + 9 = -3$	|	-9
	$1{,}5a = -12$	|	$:1{,}5$
	$a = -8$		
$a \to (1)$	$-8 - b + 3 = -3$		
	$b = 2$		

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = -8x^2 + 2x + 3$.

Lösung A10

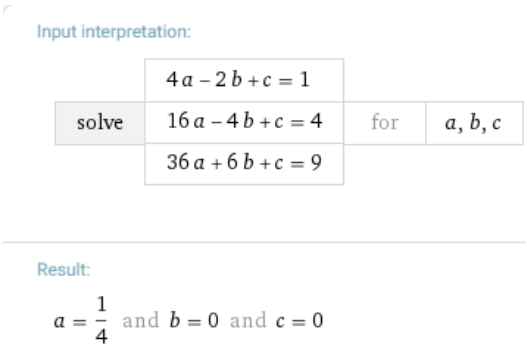
Gegeben sind die beiden Nullstellen $x_1 = -5$ und $x_2 = 5$. Der Streckungsfaktor in y-Richtung ist nicht bekannt. Wir stellen die Nullstellenform auf:
$f(x) = a \cdot (x - 5)(x + 5)$
Es sollen zwei Lösungen angegeben werden, so z.B.
$f_1(x) = x^2 - 25$ und $f_2(x) = -x^2 + 25$

Lösung A11

Quadratische Funktionsgleichung durch drei Punkte.
$f(x) = ax^2 + bx + c$
Lineares Gleichungssystem:

(1)	$4a - 2b + c = 1$	|	Punktprobe mit $P(-2\|1)$
(2)	$16a - 4b + c = 4$	|	Punktprobe mit $Q(-4\|4)$
(3)	$36a + 6b + c = 9$	|	Punktprobe mit $R(6\|9)$

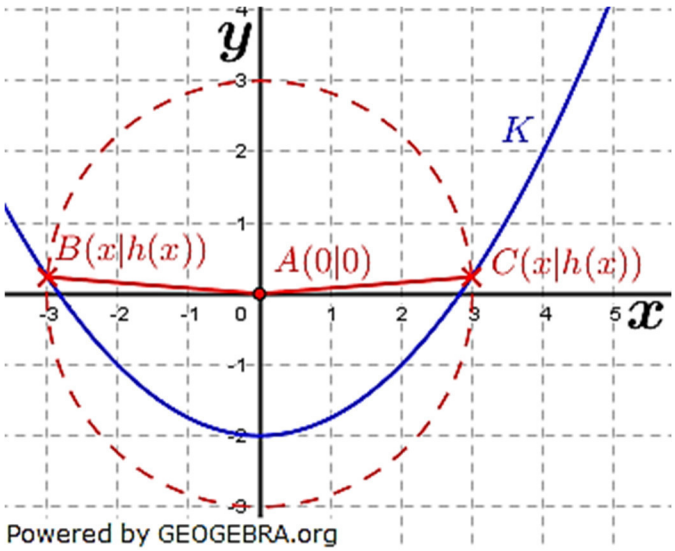
Die Auflösung des linearen Gleichungssystems führt zu
$a = \frac{1}{2}; \quad b = -1; \quad c = -1$
Die Funktionsgleichung lautet:
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$



Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

Lösung A12

Die Graphik verdeutlicht die Situation. Es gibt zwei Punkte B und C auf K die vom Ursprung A des Koordinatensystems den Abstand 3 haben.



Abstände zwischen zwei Punkten berechnen wir mit dem Satz des Pythagoras.

$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - 0)^2 + (y_B - 0)^2}$

$\overline{AB} = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$

$\overline{AB} = \sqrt{x^2 + h(x)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 2}$

Der Abstand soll 3 sein:

$\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 2} = 3$ | $\uparrow^2$

$\frac{5}{4}x^2 - 2 = 9$

$5x^2 = 44$

$x^2 = \frac{44}{5}$

$x_{1,2} = \pm 2{,}9665$

$h(2{,}9665) = \frac{1}{4} \cdot 2{,}9665^2 - 2 = \frac{1}{5}$

$h(-2{,}9665) = \frac{1}{4} \cdot (-2{,}9665)^2 - 2 = \frac{1}{5}$

Die beiden Punkte $B(-2{,}97|0{,}2)$ und $C(-2{,}97|0{,}2)$ auf h haben vom Ursprung den Abstand 3.

Zusammenhang zwischen K und dem Graph von f aus Aufgabe 11:
K ist gegenüber dem Graphen von f aus Aufgaben 11 um 2 Einheiten nach unten verschoben.

Lösung A13

Lösungshilfe

Zunächst müssen wir über die beiden gegebenen Punkte T_1 und T_2 die Funktionsgleichung der Geraden aufstellen.
Wir bestimmen dann die Schnittpunkte dieser Geraden mit der quadratischen Funktion f aus Aufgabe 12. Über die entstehenden Schnittpunkte können wir dann entscheiden, in welchen Intervallen g oberhalb bzw. unterhalb von K verläuft.

Gerade durch T_1 und T_2:

$g(x) = mx + c$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - (-1{,}75)}{-4 - (-1)} = \frac{-2{,}25}{-3} = \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \cdot (-4) + c = -4$ | Punktprobe mit $T_2(-4|-4)$

$c = -1$

$g(x) = \frac{3}{4}x - 1$

$g \cap \frac{1}{4}x^2 - 2$
$\frac{1}{4}x^2 - 2 = \frac{3}{4}x - 1$
$\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - 1 = 0$ | $\cdot 4$
$x^2 - 3x - 4 = 0$
$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 4} = 1{,}5 \pm 2{,}5$
$x_1 = -1;\ \ x_2 = 4$
g schneidet K in den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$.
Da f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ eine nach oben geöffnete Parabel ist, verläuft K im Intervall $I =]-1;4[$ unterhalb von g.

Lösung A14

Lösungshilfe

Aus der gegebenen Graphik heraus müssen wir die Funktionsgleichungen für K_f und K_g bestimmen. Durch Gleichsetzung der beiden Funktionsgleichungen können wir die Schnittpunkte von f und g bestimmen.

Funktionsgleichung für K_g:
Die Gerade verläuft durch die Punkte $P(1|-1)$ und $Q(3|5)$ (abgelesen).
$g(x) = mx + c$
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-1)}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$
$3 \cdot 1 + c = -1$ | Punktprobe mit $P(1|-1)$
$c = -4$
$g(x) = 3x - 4$
Funktionsgleichung für K_f:
Die Parabel hat ihren Scheitel in $P(1|-1)$ und verläuft durch $R(3|1)$ (abgelesen).
$g(x) = a(x-1)^2 - 1$ | Scheitelform
$a(3-1)^2 - 1 = 1$ | Punktprobe mit $R(3|1)$
$4a = 2 \ \Rightarrow \ a = \frac{1}{2}$
$g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1 = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$
$g \cap f$
$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = 3x - 4$ | $-3x + 4$
$\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2} = 0$ | $\cdot 2$
$x^2 - 8x + 7 = 0$
$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 7} = 4 \pm 3$
$x_1 = 7;\ \ x_2 = 1$
$g(1) = 3 \cdot 1 - 4 = -1$
$g(7) = 3 \cdot 7 - 4 = 17$
Die beiden Schnittpunkte von K_g und K_f haben die Koordinaten $S_1(1|-1)$ und $S_2(7|17)$.

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 3

Dokument mit 25 Aufgaben

Aufgabe A1

Die Tabelle zeigt eine Wertetabelle für zwei Funktionen f und g. Beantworte folgende Fragen mit Hilfe der Wertetabelle.

a) Wo schneiden K_f und K_g die x–Achse?

b) Wo liegen die Scheitelpunkte von K_f und K_g?

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen K_f und K_g?

d) Gib eine Funktionsgleichung für f und g an.

x	$f(x)$	$g(x)$
-3	$-3{,}5$	4
-2	$0{,}5$	0
-1	$2{,}5$	-2
0	$2{,}5$	-2
1	$0{,}5$	0
2	$-3{,}5$	4

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -0{,}25x^2 + x;\ x \in \mathbb{R}$.

a) Wo hat die zugehörige Parabel ihren Scheitelpunkt? Zeichne K.

b) H ist eine Ursprungsgerade durch den Punkt $P(-2|3)$. Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte von Parabel K und Gerade H.

c) Welche Tangente an die Parabel K ist parallel zur Geraden mit $y = -1{,}5x + 18$? Bestimme die Koordinaten des Berührpunktes.

d) Durch eine Verschiebung der Parabel K entsteht die Parabel G. G soll die x–Achse berühren. Bestimme den zugehörigen Funktionsterm. Erläutere deine Vorgehensweise.

Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2; x \in \mathbb{R}$, ihr Graph sei K.

Der Punkt $B(u|f(u))$ auf dem Graphen K ist für $1 < u < 2$ der Eckpunkt eines achsensymmetrischen Dreiecks mit Spitze im Ursprung.

Zeichne das Dreieck für $u = 1$ in ein Achsenkreuz ein.

Bestimme den Flächeninhalt in Abhängigkeit von u.

Für welchen Wert von u hat das Dreieck eine Fläche von $2\ FE$?

Aufgabe A4

Gegeben sind die quadratischen Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 - 3x;\ x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x(x+3);\ x \in \mathbb{R}$.

a) Mache Aussagen über die gegenseitige Lage der beiden Schaubilder K von f und G von g.

b) Verschiebe die Parabel G von g in y–Richtung so, dass die verschobene Parabel das Schaubild K von f berührt. Bestimme die Koordinaten des Berührpunktes.

Aufgabe A5

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = x^2 - 2;\ x \in \mathbb{R}$. Wie entsteht das Schaubild von f aus dem Schaubild von g?

a) $f(x) = g(x+2)$ b) $f(x) = g(-x)$

c) $f(x) = 0{,}5g(x) + 1$

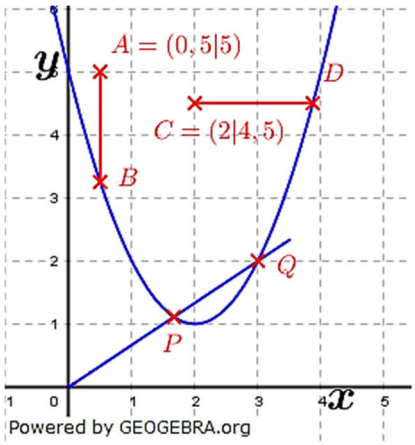
Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 3

Aufgabe A6

Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = x^2 - 2$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$; $x \in \mathbb{R}$.
Durch den Scheitel der Parabel K von f verläuft das Schaubild H einer linearen Funktion mit dem Anstieg -2.
Gib die Argumente (x-Werte) an, für die die Funktionswerte von f, g und h jeweils gleich 0 bzw. größer als 3 sind.
Haben die drei Graphen von f, g und h einen gemeinsamen Punkt?

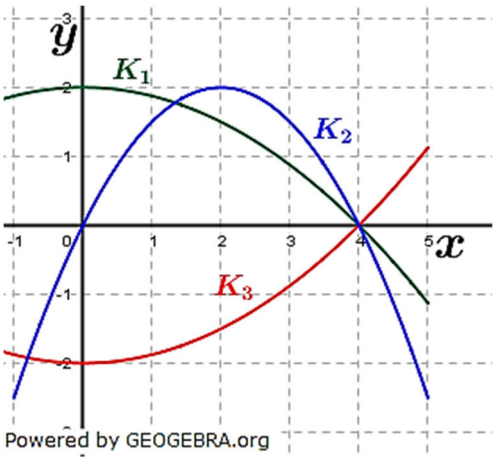
Aufgabe A7

Die eingezeichnete Strecke $\overline{AB}$ beginnt im angegebenen Punkt A und endet am Graph K der Funktion f.
Berechne die Längen der eingezeichneten Strecken $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ und $\overline{PQ}$.



Aufgabe A8

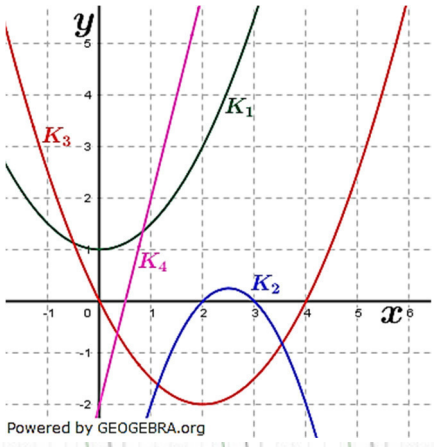
Welches Schaubild der nebenstehenden Abbildung passt zu folgender Beschreibung:
Die Parabel ist symmetrisch zur Geraden $x = 2$ und schneidet die x-Achse in 4.
Begründe deine Wahl.



Aufgabe A9

Entscheide, welche Kurve zu welchem Funktionsterm passt. Begründe, indem du jeweils eine Eigenschaft angibst.

a) $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$
b) $f_2(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$
c) $f_3(x) = (x-2)^2 - 1$
d) $f_4(x) = 0{,}5(x-2)^2 - 2$
e) $f_5(x) = (x-2)(3-x)$
f) $f_6(x) = x^2 + x - 6$.
g) $f_7(x) = 2x^2 - 2$
h) $f_8(x) = 4x - 2$



Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 3

Lösung A1

Lösungshilfe

Stelle über die Tabelle fest, an welcher Stelle sich die Symmetrieachse befindet.

a) Im Schnittpunkt mit der x-Achse ist der y-Wert.
K_f: Nullstellen bei $-3 < x < -2$ und bei $1 < x < 2$.
K_g: Nullstellen $N_1(-2|0)$; $N_2(1|0)$

b) Scheitelpunkte:
K_f: $S(-0{,}5|f(-0{,}5)$ nach unten geöffnet.
K_g: $S(-0{,}5|g(-0{,}5))$ nach oben geöffnet.

c) Zusammenhang:
Beide Graphen haben die Form einer Normalparabel. Die Symmetrieachse, auf der der Scheitel liegt, hat die Gleichung $x = -0{,}5$.

d) Funktionsgleichungen:
K_f: Parabelgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ durch drei Punkte:

(I)	$9a - 3b + c = -3{,}5$	|	Punktprobe mit $P(-3\|-3{,}5)$
(II)	$a + b + c = 0{,}5$	|	Punktprobe mit $P(1\|0{,}5)$
(III)	$c = 2{,}5$	|	Punktprobe mit $R(0\|2{,}5)$
(I)	$9a - 3b + 2{,}5 = -3{,}5$		
(II)	$a + b + 2{,}5 = 0{,}5$	|	$\cdot 3$
(I)	$9a - 3b + 2{,}5 = -3{,}5$		
(II)	$\underline{3a + 3b + 7{,}5 = 1{,}5}$		
(I)+(II)	$12a + 10 = -2$		
	$12a = -12 \Rightarrow a = -1$		
$a \to (II)$	$-1 + b = -2$		
	$b = -1$		

$f(x) = -x^2 - x + 2{,}5$

K_g: Parabelgleichung $g(x) = (x + x_1)(x - x_2)$ mit zwei Nullstellen:
$g(x) = (x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$

Lösung A2

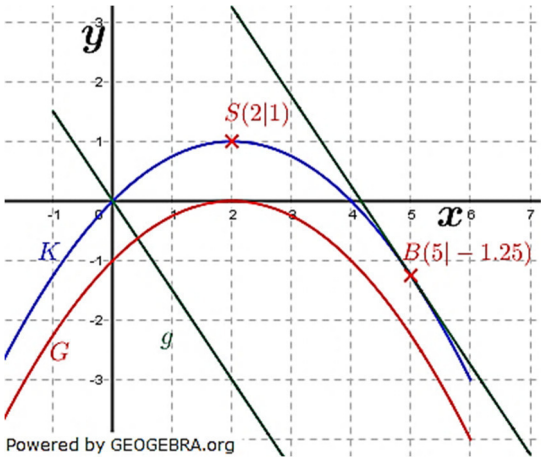
$f(x) = -0{,}25x^2 + x$

a) Scheitelpunkt bestimmen:

$f(x) = -0{,}25x^2 + x$	|	$:-0{,}25$
$-4 \cdot f(x) = x^2 - 4x$	|	Scheitelform bilden
$-4 \cdot f(x) = (x-2)^2 - 4$	|	$:-4$

$f(x) = -0{,}25(x-2)^2 + 1$
$S(2|1)$

b) Geradengleichung (Ursprungsgerade) aufstellen:
$g(x) = mx$
$m = \frac{3-0}{-2-0} = -\frac{3}{2} \Rightarrow g(x) = -\frac{3}{2}x$
$f(x) \cap g(x)$
$-0{,}25x^2 + x = -\frac{3}{2}x$
$x(-0{,}25x + 2{,}5) = 0$
$x_1 = 0$; $x_2 = 10$
$g(0) = 0$; $g(10) = -15$
$S_1(0|0)$; $S_2 = (10|-15)$

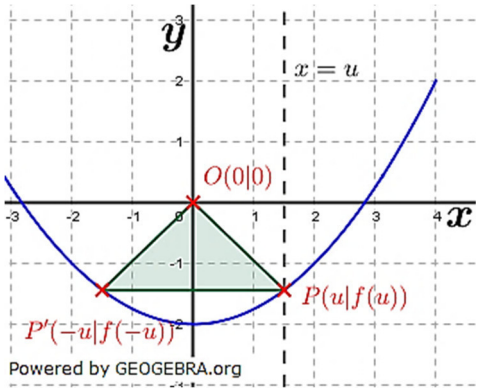


c) Tangente parallel zu $y = -1{,}5x + 18$ hat die Funktionsgleichung
$t(x) = -1{,}5x + c$
$f(x) \cap t(x)$
$-0{,}25x^2 + x = -1{,}5x + c$
$-0{,}25x^2 + 2{,}5x - c = 0 \quad | \quad \cdot -4$
$x^2 - 10x + 4c = 0$
$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 4c} \quad | \quad p/q$-Formel
Tangente heißt berühren. Damit doppelte Nullstelle bei Schnittpunkten.
$\sqrt{25 - 4c} = 0$
$25 - 4c = 0 \Rightarrow c = 6{,}25$
Die Gerade mit der Gleichung $t(x) = -1{,}5x + 6{,}25$ ist Tangente an f.
Berührpunkt bei $x_1 = 5$:
$t(5) = -1{,}5 \cdot 5 + 6{,}25 = -1{,}25$
Der Berührpunkt ist $B(5|-1{,}25)$

d) Verschiebung von K nach G, so dass G die x-Achse berührt:
K hat den Scheitel in $S(2|1)$ (siehe Aufgabenteil a)). Im Berührpunkt mit der x-Achse ist $y = 0$. Der Scheitel von G muss also bei $S_G(x_0|0)$ liegen. Dies erreichen wir, indem wir K um eine Einheit nach unten schieben.
Die Funktionsgleichung von G lautet dann:
$g(x) = -0{,}25x^2 + x - 1$

Lösung A3

Nebenstehende Graphik verdeutlicht die Situation.



Flächeninhalt Dreieck: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} g \cdot h_g$
$g = 2u; \; h_g = f(u))$
$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot f(u)$
$A_{Dreieck}(u) = u \cdot \left(\frac{1}{4}u^2 + 2\right) = \frac{1}{4}u^3 + 2u$
$A_{Dreieck}(u) = 2$
$\frac{1}{4}u^3 + 2u = 2$
$u^3 + 8u = 8$
$u^3 + 8u - 8 = 0$
$u_1 = 0{,}91$
Für $u \approx 0{,}9$ beträgt der Inhalt des Dreiecks $P'PO\ 2\ FE$.

Lösung A4

Lösungshilfe

Bestimme zunächst den Scheitelpunkt und die Öffnungsrichtung der Parabeln. Beachte für Aufgabenteil b), dass für Verschiebung in y-Richtung c zu verändern ist.

a)

$f(x) = -x^2 - 3x$	$g(x) = \frac{1}{2}x(x+3) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$
$-f(x) = x^2 + 3x$	$2g(x) = x^2 + 3x$
$-f(x) = (x+1{,}5)^2 - 2{,}25$	$2g(x) = (x+1{,}5)^2 - 2{,}25$
$f(x) = -(x+1{,}5)^2 + 2{,}25$	$g(x) = 0{,}5 \cdot (x+1{,}5)^2 - 1{,}125$
$S_f(-1{,}5|2{,}25)$	$S_g(-1{,}5|-1{,}125)$
Normalparabel,	Gestauchte Parabel
Nach unten geöffnet.	Nach oben geöffnet.

b) $g^*(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+c$

$f(x)\cap g^*(x)$

$-x^2-3x=0{,}5x^2+\frac{3}{2}x+c$

$\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x+c=0 \quad | \quad \cdot\frac{2}{3}$

$x^2+3x+\frac{2}{3}c=0$

$x_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{2}{3}c} \quad | \quad p/q$-Formel

Berühren heißt doppelte Nullstelle bei Schnittpunkten.

$\sqrt{2{,}25-\frac{2}{3}c}=0$

$\frac{9}{4}-\frac{2}{3}c=0 \Rightarrow c=\frac{27}{8}$

Der Graph von g^* mit $g^*(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{27}{8}$ berührt das Schaubild K von f.

Berührpunkt bei $x_0=-\frac{3}{2}$:

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}=\frac{9}{4}$

Der Berührpunkt ist $B\left(-\frac{3}{2}\middle|\frac{9}{4}\right)$

Lösung A5

Das Schaubild von f entsteht aus dem Schaubild von g durch…

a) …Verschiebung um zwei Einheiten nach links.

b) …Spiegelung an der y-Achse.

c) …Streckung in y-Richtung mit $k=0{,}5$ und anschließender Verschiebung um eine Stelle nach oben.

Lösung A6

Lösungshilfe

Bestimme zunächst den Scheitelpunkt der Parabel K und stelle die Funktionsgleichung der Geraden H durch den Scheitelpunkt mit der Steigung $m=-2$ auf.
Bestimme nun die Nullstellen für f, g und h sowie die Intervalle, in denen die Funktionswerte von f, g und h größer als 3 sind.
Bestimme abschließend die Schnittpunkte von $f\cap g$, $f\cap h$ und $g\cap h$ und prüfe, ob es einen gemeinsamen Schnittpunkt gibt.

Scheitelpunkt von K:

$f(x)=x^2-2$ | in x-Richtung unverschobene Parabel

$S_K(0|-2)$

Funktionsgleichung für H:

$h(x)=m\cdot(x-x_0)+f(x_0)$ | Punkt-Steigungsform

$h(x)=-2\cdot(x-0)-2$ | Scheitel S_K einsetzen

$h(x)=-2x-2$

Nullstellen (Funktionswert $y=0$):

von K:	von H:
$x^2-2=0$	$-2x-2=0$
$x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$	$x_0=-1$
$N_1=(\sqrt{2}\|0);\quad N_2(-\sqrt{2}\|0)$	$N_H=(-1\|0)$

von G:
$\frac{1}{2}x^2 = 0$
$x_0 = 0$
$N_G = (0|0)$

Funktionswerte > 3

von K:
$x^2 - 2 > 3$
$x_1 > \sqrt{5};\ \ x_2 < -\sqrt{5}$
$f(x) > 3$ für $x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}$

von H:
$-2x - 2 > 3$
$-2x > 5$
$x < 2{,}5$
$h(x) > 3$ für $x < 2{,}5$

von G:
$\frac{1}{2}x^2 > 3$
$x_1 > \sqrt{6};\ \ x_2 < -\sqrt{6}$
$g(x) > 3$ für $x < -\sqrt{6} \vee x > \sqrt{6}$

Gemeinsame Schnittpunkte:

$f \cap g$:
$x^2 - 2 = \frac{1}{2}x^2$
$\frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$
$x^2 = 4$
$x_{1,2} = \pm 2$

$f \cap h$:
$x^2 - 2 = -2x - 2$
$x^2 + 2x = 0$
$x(x + 2) = 0$
$x_1 = 0;\ \ x_2 = -2$

$g \cap h$:
$\frac{1}{2}x^2 = -2x - 2$
$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$
$x^2 + 4x + 4 = 0$
$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 4}$
$x_1 = -2$

f, g und h schneiden sich bei $x_0 = -2$ im Punkt $S(-2|2)$.

Lösung A7

Lösungshilfe

Bestimme zunächst die Funktionsgleichungen der beiden Graphen in der Grafik.
Bestimme dann die Koordinaten der Punkte B und D auf der Parabel, sowie die der Punkte P und Q als Schnittpunkte zwischen Parabel und Gerade.
Abstände zwischen zwei Punkte errechnen wir mit dem Satz des Pythagoras.

Funktionsgleichung der Parabel (Normalparabel mit Scheitel $S(2|1)$):
$p(x) = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$
Funktionsgleichung der Geraden (Ursprungsgerade mit Steigung $m = \frac{2}{3}$):
$g(x) = \frac{2}{3}x$

Bestimmung von Koordinaten:

Punkt $B\left(0{,}5\middle|p(0{,}5)\right)$:

$B(0{,}5|3{,}25)$

Punkt $P; Q$:

$p(x) \cap g(x)$

$x^2 - 4x + 5 = \frac{2}{3}x$

$x^2 - \frac{14}{3}x + 5 = 0$

$x_{1,2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} - \frac{45}{9}} = \frac{7}{3} \pm \frac{2}{3}$

$x_P = 3; \quad x_Q = \frac{5}{3}$

$P(3|2); \quad Q = \left(\frac{5}{3}\middle|\frac{10}{9}\right)$

Punkt $D(x_D|4{,}5)$:

$x^2 - 4x + 0{,}5 = 0$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 0{,}5} = 2 \pm 1{,}871$

$x_D = 3{,}87$

$D(3{,}87|4{,}5)$

Abstände:

$\overline{AB} = y_A - y_B = 5 - 3{,}25 = 1{,}75\ LE$

$\overline{CD} = x_D - x_C = 3{,}87 - 2 = 1{,}87\ LE$

$\overline{PQ} = \sqrt{\left(x_Q - x_P\right)^2 + \left(y_Q - y_P\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2} \approx 1{,}6\ LE$

Lösung A8

K_2 entspricht dem Schaubild der Beschreibung, der Scheitel liegt in $S(2|2)$, somit ist $x = 2$ die Symmetrieachse.

Lösung A9

$K_1 \rightarrow f_1(x)$, da Schnittpunkt $S_y(0|1)$ und $P(2|3) \in K_1$.

$K_2 \rightarrow f_5(x)$, da nach unten geöffnete Parabel und Nullstellen $N_1(2|0)$ und $N_2(3|0)$.

$K_3 \rightarrow f_4(x)$, da nach oben geöffnete, gestauchte Parabel mit Scheitel $S(2|-2)$.

$K_4 \rightarrow f_8(x)$, da lineare Funktion mit y-Achsenabschnitt $S_y(0|-2)$.

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 4

Dokument mit 34 Aufgaben

Aufgabe A1

Eine quadratische Funktion f hat ihren Scheitel in $S(0|6)$ und schneidet die x-Achse im Punkt $P(2\sqrt{3}|0)$.
Bestimme die Funktionsgleichung und zeichne den Graphen.

Aufgabe A2

Gegeben sind die Funktionsgleichungen folgender Parabeln:

1. Bestimme die Scheitelform und den Scheitelpunkt.
2. Berechne die Achsenschnittpunkte.
3. Beschreibe schrittweise, wie f aus der Normalparabel entsteht und wie sie geöffnet ist.
4. Zeichne den Graphen von f in ein geeignetes Koordinatensystem.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ b) $f(x) = x^2 + 4x + 2$ c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

d) $f(x) = -x^2 + 8x - 9$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$ f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.

a) Berechne den Scheitelpunkt mithilfe der Scheitelform.
b) Berechne die Achsenschnittpunkte.
c) Die Parabel soll so verschoben werden, dass der Punkt der Parabel, der auf der y-Achse liegt durch den Punkt $P(-3|-1)$ verläuft. Wie lautet die Funktionsgleichung $p(x)$ der verschobenen Parabel?
d) Wo schneiden sich beide Parabeln?
e) Zeichne beide Parabeln in ein geeignetes Koordinatensystem.

Aufgabe A4

Der Kraftstoffverbrauch eines PKW hängt bekanntlich von der Geschwindigkeit ab. Durch Messungen wurde der funktionale Zusammenhang ermittelt.
Es gilt: $K(v) = 0{,}002v^2 - 0{,}18v + 8{,}55$ für $v > 40$. Dabei bedeutet $K(v)$ der Kraftstoffverbrauch in Liter/$100\,km$ und v die Geschwindigkeit in km/h.

a) Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Verbrauch genau 7 Liter auf $100\,km$?
b) Bei welcher Geschwindigkeit ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten?

Aufgabe A5

Bestimme die Scheitelform der Parabeln und zeichne sie.

a) Die Normalparabel wird um 3 gestreckt, um 4 nach rechts und um $1{,}5$ nach unten verschoben. Die Parabel ist nach oben geöffnet.
b) Die Normalparabel wird um $\frac{1}{2}$ gestaucht, um $\frac{5}{4}$ nach links und um 1 nach unten verschoben. Die Parabel ist nach oben geöffnet.
c) Die Normalparabel wird um $1{,}75$ gestreckt, um 2 nach links und um $5{,}25$ nach oben verschoben. Die Parabel ist nach unten geöffnet.

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 4

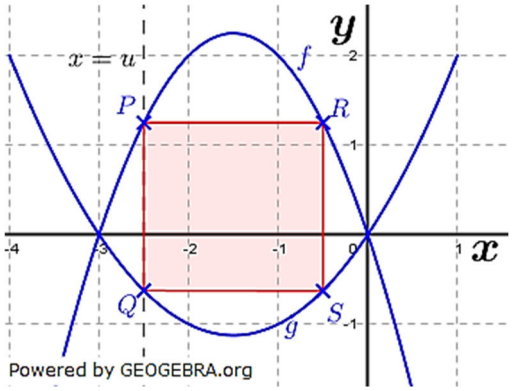
Aufgabe A6

Gegeben sind die quadratischen Funktionen f mit $f(x) = -x^2 - 3x; x \in \mathbb{R}$ und g mit $g(x) = 0{,}5x(x+3);\ \ x \in \mathbb{R}$.

a) Abgebildet sind die Graphen von f und g. Begründe ohne Rechnung, warum sich f und g auf der x-Achse schneiden.
$S(-1{,}5|2{,}25)$ ist der Scheitel von f.
Gib den Scheitel von g an.

b) Die Gerade $x = u$ schneidet den Graphen von f im Punkt P und den Graphen von g im Punkt Q. Gib die Koordinaten von P und Q an.

c) Für $u \in]-3;0[$ ist die Strecke $\overline{PQ}$ eine Seite eines Rechtecks, das den beiden Parabeln einbeschrieben ist. Bestimme den Inhalt des Rechtecks für $u = -1$ und den Umfang U in Abhängigkeit von u.



d) Verschiebe die Parabel g in y-Richtung so, dass die verschobene Parabel den Graphen von f berührt. Bestimme die Koordinaten des Berührpunktes B.

e) Bestimme a so, dass $f(a) - f(a+1) = 4$ ist.

Aufgabe A7

Bestimme die Schnittpunkte der Geraden $g(x) = x - 1{,}5$ mit der Parabel $f(x) = x^2 - 4x + 2{,}5$ rechnerisch.
Kontrolliere dein Ergebnis graphisch.

Aufgabe A8

Gib jeweils die Gleichung einer Parabel an, die mit der Parabel $f(x) = x^2 + 2x$ keinen, einen bzw. zwei verschiedene Schnittpunkte hat.

Aufgabe A9

Wodurch unterscheiden sich die Parabeln $f(x) = 3x^2 - 18x + 27$ und $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$?

Aufgabe A10

Bei welcher der Folgenden Funktionen handelt es sich um quadratische Funktionen?

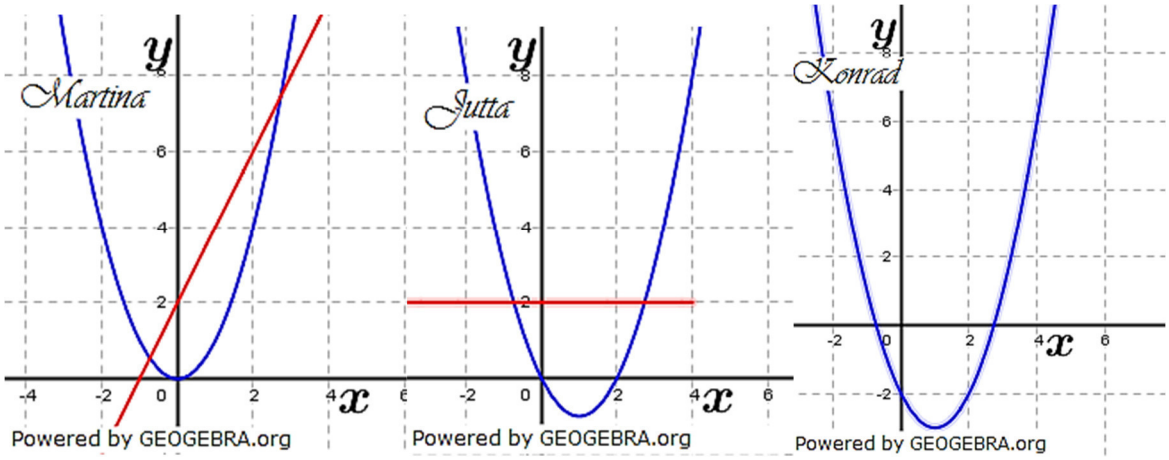
a) $f(x) = x + 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ c) $f(x) = 2x^2 + 4 + x^3$

d) $f(x) = -4x^2 + 5x + 9$ e) $f(x) = \sqrt{5}x^2$ f) $f(x) = x^2$

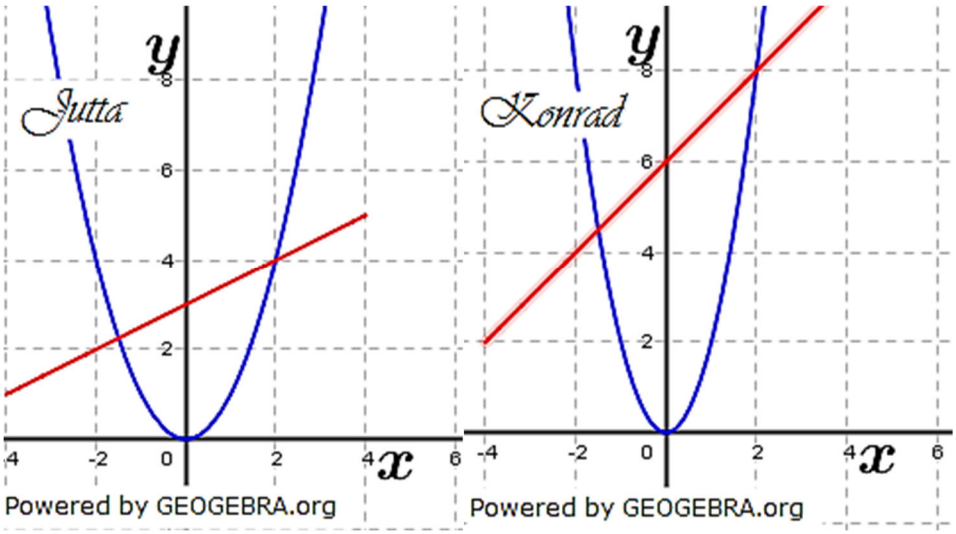
Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 4

Aufgabe A11

Martina, Jutta und Konrad sollten als Hausaufgabe die Gleichung $x^2 - 2x - 2 = 0$ graphisch lösen. Sie sind dabei unterschiedlich vorgegangen, aber alle auf die gleichen Näherungslösungen $x_1 \approx -0{,}7$ und $x_2 \approx 2{,}7$ gekommen.



a) Überprüfe die Näherungslösungen rechnerisch.
b) Erläutere die Vorgehensweisen von Martina, Jutta und Konrad.
c) Ermittle mit jedem Verfahren die Lösungen der Gleichung $x^2 + 3x + 2 = 0$.
d) Jutta und Konrad sind von Martinas Methode begeistert und versuchen, damit die Gleichung $2x^2 - x - 6 = 0$ zu lösen. Sie gehen dabei aber unterschiedlich vor (siehe nachstehende Abbildungen). Welche Ergebnisse erhalten sie? Überprüfe rechnerisch. Wer von beiden ist deiner Meinung nach geschickter vorgegangen? Begründe.



Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 4

Lösung A1

$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$; $S(0|6)$; $P(2\sqrt{3}|0)$.

$f(x) = a \cdot (x - 0)^2 + 6 = ax^2 + 6$

$0 = a \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 6$ | Punktprobe mit $P(2\sqrt{3}|0)$

$-6 = a \cdot 12$

$a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6$

Lösung A2

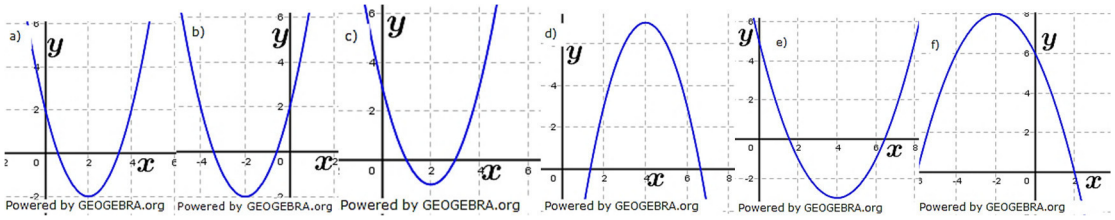
1. Scheitelform und Scheitelpunkt:

a)	$f(x) = (x-2)^2 - 2$ $S(2\|-2)$	b)	$f(x) = (x+2)^2 - 2$ $S(-2\|-2)$	c)	$f(x) = (x-2)^2 - 1$ $S(2\|-1)$
d)	$f(x) = -(x-4)^2 + 7$ $S(4\|7)$	e)	$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}$ $S\left(2\left\|\frac{1}{2}\right.\right)$	f)	$f(x) = -(x+1)^2 + \frac{7}{2}$ $S\left(-1\left\|\frac{7}{2}\right.\right)$

2. Berechne die Achsenschnittpunkte.

a)	$f(x) = x^2 - 4x + 2$ $N_1\left(2+\sqrt{2}\|0\right); N_2\left(2-\sqrt{2}\|0\right);$ $S_y(0\|2)$	b)	$f(x) = x^2 + 4x + 2$ $N_1\left(-2+\sqrt{2}\|0\right);$ $N_2\left(-2-\sqrt{2}\|0\right);$ $S_y(0\|2)$	c)	$f(x) = x^2 - 4x + 3$ $N_1(3\|0); N_2(1\|0);$ $S_y(0\|3)$
d)	$f(x) = -x^2 + 8x - 9$ $N_1\left(4+\sqrt{7}\|0\right); N_2\left(4-\sqrt{7}\|0\right);$ $S_y(0\|-9)$	e)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$ $N_1\left(4+\sqrt{6}\|0\right); N_2\left(4-\sqrt{6}\|0\right);$ $S_y(0\|5)$	f)	$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$ $N_1(2\|0); N_2(-6\|0);$ $S_y(0\|6)$

3. Das Schaubild von f geht aus dem Schaubild der Normalparabel hervor durch:
   a) Verschiebung um zwei Einheiten nach rechts und um zwei Einheiten nach unten.
   b) Verschiebung um zwei Einheiten nach links und um zwei Einheiten nach unten.
   c) Verschiebung um zwei Einheiten nach rechts und um eine Einheiten nach unten.
   d) Spiegelung an der x-Achse, Verschiebung um vier Einheiten nach rechts und um sieben Einheiten nach oben.
   e) Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{1}{2}$,Verschiebung um zwei Einheiten nach rechts und um eine halbe Einheit nach oben.
   f) Spiegelung an der x-Achse, Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{1}{2}$, Verschiebung um eine Einheit nach links und um $\frac{7}{2}$ Einheiten nach oben.
4. Graphen aller f:



Lösung A3

a) Scheitelform

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ | $\cdot(-2)$

$-2f(x) = x^2 - 4x - 2$

$-2f(x) = (x-2)^2 - 4 - 2$ | quadratische Ergänzung

$-2f(x) = (x-2)^2 - 6$ | $:(-2)$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$

$S(2|3)$

b) Achsenschnittpunkte:

$f(0) = 1$; $S_y(0|1)$

Nullstellen:

$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = 0$ | $\cdot(-2)$

$x^2 - 4x - 2 = 0$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+2} = 2 \pm \sqrt{6}$

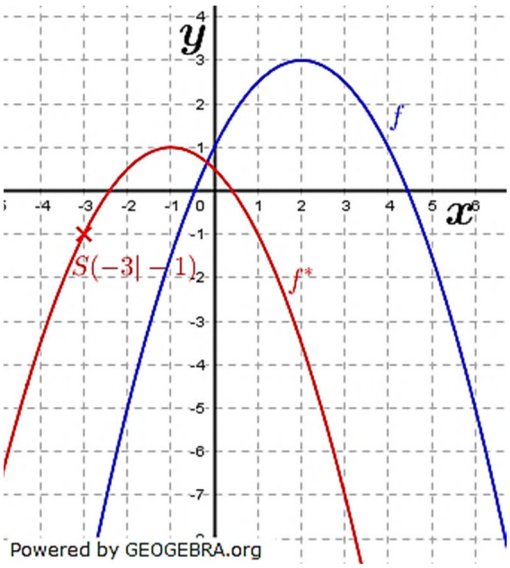
$N_1(2+\sqrt{6}|0)$; $N_2(2-\sqrt{6}|0)$

c) Punkt auf y-Achse ist $S_y(0|1)$. Dieser Punkt soll nun $P(-3|-1)$ sein.
Die Parabel muss um drei Stellen nach links und um zwei Stellen nach unten verschoben werden.

$f^*(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 2(x+3) + 1 - 2$

$f^*(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9) + 2x + 6 - 1$

$f^*(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 0{,}5$



d) Schnittpunkt der beiden Parabeln:

$f(x) \cap f^*(x)$

$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = -\frac{1}{2}x^2 - x + 0{,}5$

$3x = -0{,}5$

$x = -\frac{1}{6}$

$f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{6}\right) + 1$

$= -\frac{1}{72} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{47}{72}$

$S\left(-\frac{1}{6}\middle|\frac{47}{72}\right)$

e) siehe Grafik rechts.

Lösung A4

a) Geschwindigkeit für $7\ ltr$ Benzinverbrauch auf $100\ km$.

$K(v) = 7$

$0{,}002v^2 - 0{,}18v + 8{,}55 = 7$ | -7

$0{,}002v^2 - 0{,}18v + 1{,}55 = 0$ | $:0{,}002$

$v^2 - 90v + 775 = 0$

$v_{1,2} = 45 \pm \sqrt{1625 - 775}$ | p/q-Formel

$= 45 \pm \sqrt{850}$

$v_1 = 74{,}155$; $v_2 = 15{,}85$

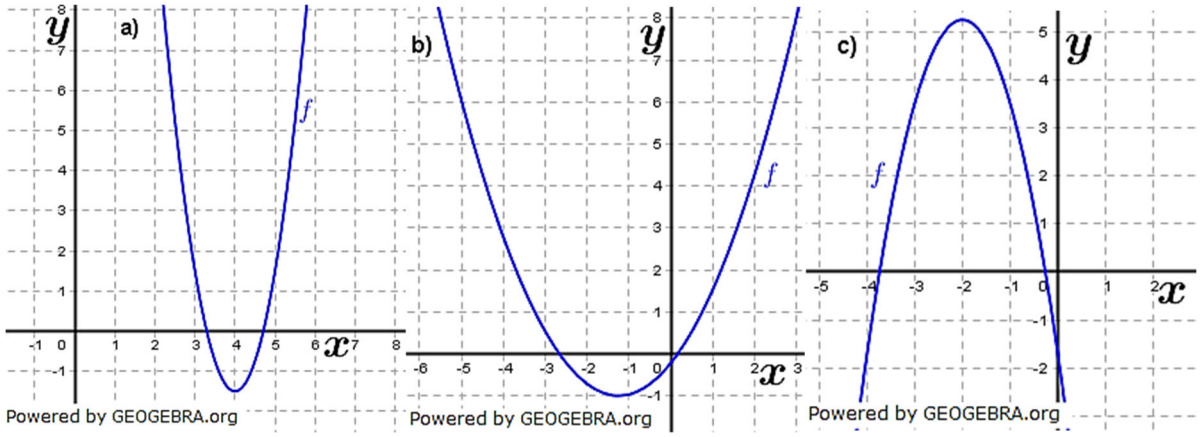
Wegen Aufgabenstellung $v > 40$ ist $v_1 = 74{,}155$ die gesuchte Lösung.

Bei etwa $74\ km/h$ benötigt das Fahrzeug $7\ ltr/100\ km$.

b) Geschwindigkeit des geringsten Verbrauchs:
$K(v)$ ist eine Parabel, die Geschwindigkeit des geringsten Verbrauchs liegt im Scheitel dieser Parabel.
Scheitelpunktgleichung $K(v)$:
$K(v) = 0{,}002v^2 - 0{,}18v + 8{,}55 \quad | \quad \cdot 500$
$500K(v) = v^2 - 90v + 4275$
$500K(v) = (v-45)^2 - 2025 + 4275$
$500K(v) = (v-45)^2 + 2250 \quad | \quad :500$
$K(v) = 0{,}002(v-45)^2 + 4{,}5$
Der geringste Verbrauch ist bei $45\ km/h$ *mit etwa* $4{,}5\ ltr\ /\ 100\ km.$

Lösung A5

a) $f(x) = 3(x-4)^2 - 1{,}5$
b) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - 1$
c) $f(x) = -1{,}75(x+2)^2 + 5{,}25$



Lösung A6

a) $g(x)$ ist in Nullstellenform gegeben, $f(x)$ umgestellt ergibt $f(x) = -x(x+3)$, ebenfalls eine Nullstellenform.
Aus den Nullstellenformen lesen wir ab, dass sowohl f als auch g die x-Achse in $N_1(-3|0)$ und $N_2(0|0)$ schneiden.
Scheitelpunkt von g:
Wegen der identischen Nullstellen liegt der Scheitel von g ebenfalls bei $x_0 = -1{,}5$.
$g(-1{,}5) = 0{,}5 \cdot (-1{,}5)(-1{,}5+3) = -1{,}125$
$S_g(-1{,}5|-1{,}125)$

b) Koordinaten von P und Q:
P liegt auf f mit $P\big(u\big|f(u)\big)$
Q liegt auf g mit $Q\big(u\big|g(u)\big)$
$P(u|-u^2-3u)$; $Q(u|0{,}5u(u+3))$

c) Koordinaten von R und S:
Wegen der Symmetrieachse bei $x_0 = -1{,}5$ liegen die x-Werte von R und S bei $x_R = x_S = |-1{,}5+u|$, somit
$R(-1{,}5+(-1{,}5-u)|-u^2-3u)$; $S\big(-1{,}5+(-1{,}5-u)\big|0{,}5u(u+3)\big)$

Fläche eines Rechtecks: $A_{Rechteck} = a \cdot b$
Wir bestimmen die Koordinaten der Punkt P, Q, R und S für $u = -1$:
$P(-1|2)$; $Q(-1|-1)$
$R(-2|-(-2)^2 - 3 \cdot (-2))$; $S(-2|0{,}5 \cdot (-2)(-2+3))$
$R(-2|2)$; $S(-2|-1)$
Aus $A_{Rechteck} = a \cdot b$ ergibt sich $a = x_P - x_R = -1 - (-2) = 1$ und
$b = y_P - y_Q = 2 - (-1) = 3$
$A_{Rechteck} = 1 \cdot 3 = 3$
Das Rechteck $PQRS$ hat für $u = -1$ einen Flächeninhalt von $3\,FE$.

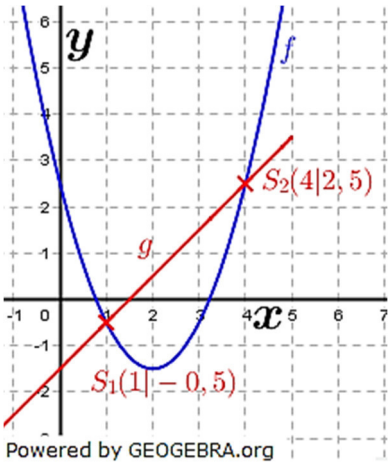
Für den Umfang des Rechtecks gilt allgemein:
$a = |x_P - x_R| = |u - (-3-u)| = |3 + 2u|$
$b = |y_P - y_Q| = |-u^2 - 3u - (0{,}5u(u+3)| = |-1{,}5u^2 - 4{,}5u|$
$U(u) = 2 \cdot (a+b) = 2 \cdot (|3+2u| - 1{,}5u^2 - 4{,}5u)$

d) Verschieben von g in y-Richtung, sodass g die Parabel f berührt:
Symmetrieachse von f und g sind identisch. Somit muss g soweit verschoben werden, dass der Scheitel von g mit dem Scheitel von f zusammenfällt.
$S_f(-1{,}5|2{,}25)$ | gegeben
$S_g(-1{,}5|-1{,}225)$ | errechnet Teilaufgabe a)
Verschiebung von g um $y_{S_f} - y_{S_g}$ Einheiten nach oben.
$y_{S_f} - y_{S_g} = 2{,}25 + 1{,}225 = 3{,}475$
$g^*(x) = g(x) + 3{,}475 = 0{,}5x^2 + 1{,}5x + 3{,}475$
$B(-1{,}5|2{,}5)$
Der Berührpunkt ist zugleich Scheitelpunkt von f.

e) $f(a) - f(a+1) = 4$
$-a^2 - 3a - \left(-(a+1)^2 - 3(a+1)\right) = 4$
$-a^2 - 3a + a^2 + 2a + 1 + 3a + 3 = 4$
$2a + 4 = 4$
$a = 0$
Für $a = 0$ ist $f(a) - f(a+1) = 4$

Lösung A7

$g(x) = x - 1{,}5$; $f(x) = x^2 - 4x + 2{,}5$
$g(x) \cap f(x)$:
$x^2 - 4x + 2{,}5 = x - 1{,}5$
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4}$ | p/q-Formel
$x_{1,2} = 2{,}5 \pm 1{,}5$
$x_1 = 4$; $x_2 = 1$
$g(1) = 1 - 1{,}5 = -0{,}5$
$g(4) = 4 - 1{,}5 = 2{,}5$
$S_1(1|-0{,}5)$; $S_2(4|2{,}5)$



Lösung A8

$f(x) = x^2 + 2x$
Normalparabel, nach oben geöffnet, Symmetrieachse $x = -1$.
Kein Schnittpunkt mit f:
$p(x) = -x^2 - 2$
Ein Schnittpunkt mit f:
$p(x) = x^2 + 4x$
Zwei Schnittpunkte mit f:
$p(x) = \frac{1}{2}x^2$

Lösung A9

$f(x) = 9 \cdot g(x)$
f ist gegenüber g mit dem Faktor $k = 9$ in y-Richtung gestreckt.

Lösung A10

a)	$f(x) = x + 1$ Nicht quadratisch	b)	$f(x) = \frac{1}{x^2}$ Nicht quadratisch	c)	$f(x) = 2x^2 + 4 + x^3$ Nicht quadratisch
d)	$f(x) = -4x^2 + 5x + 9$ Quadratisch	e)	$f(x) = \sqrt{5}x^2$ Quadratisch	f)	$f(x) = x^2$ Quadratisch

Lösung A11

a) $x^2 - 2x - 2 = 0$
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 2}$ | p/q-Formel
$x_1 \approx 2{,}73;\quad x_2 = -0{,}73$

b) Martina:
Bestimmt die Lösungen über die Schnittstellen der Normalparabel $f(x) = x^2$ und der Geraden $g(x) = 2x + 2$.
Jutta:
Bestimmt die Lösungen über die Schnittstellen der Parabelfunktion $f(x) = x^2 - 2x$ und der Geraden $y = 2$.
Konrad:
Bestimmt die Lösungen über die Nullstellen der Parabelfunktion $f(x) = x^2 - 2x - 2$.

c) $x^2 + 3x + 2 = 0$
Verfahren Martina:
$f(x) = x^2;\quad g(x) = -3x - 2$
$f(x) \cap g(x)$
Verfahren Jutta:
$f(x) = x^2 + 3x;\quad g(x) = -2$
$f(x) \cap g(x)$
Verfahren Konrad:
$x^2 + 3x + 2 = 0$
$x_{1,2} = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 2}$ | p/q-Formel
$x_1 = -1;\quad x_2 = -2$
Alle Verfahren führen zum selben Ergebnis.

d) $2x^2 - x - 6 = 0 \quad | \quad :2$

$x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{48}{16}} \quad | \quad p/q$-Formel

$x_1 = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = 2; \quad x_2 = \frac{1}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{3}{2}$

Jutta ist geschickter vorgegangen, da sie die Gleichung $2x^2 - x - 6 = 0$ zunächst durch 2 geteilt hat und dann die Schnittstellen zwischen der Normalparabel $f(x) = x^2$ und der Geraden $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$ ermittelt hat.

Level 3 – Expert – Blatt 1

Dokument mit 14 Aufgaben

Aufgabe A1

Eine Flüssigkeit wird auf $90\,°C$ erhitzt. Dann lässt man sie bei einer Umgebungstemperatur von $20\,°C$ abkühlen. Bei diesem Experiment erhält man folgende Messreihe.

Zeit t in Minuten	0	1	2	3	4	5	6	7
Temperatur in °C	90	58	40	31	26	22	21,5	21

Stelle die Messdaten in einem Koordinatensystem dar.
Bestimme eine Gleichung einer Regressionskurve und zeichne die Kurve in das Koordinatensystem ein. Beurteile die Regressionskurve.

Aufgabe A2

Über die Gesamtkosten eines Betriebes in € ist Folgendes bekannt:
Für eine Produktion von 10 Stück entstehen Gesamtkosten von $1050\,€$, bei 20 Stück sind es $1400\,€$.

a) Bestimme die Kostenfunktion K unter der Annahme, dass es sich um eine quadratische Funktion handelt und die Fixkosten $900\,€$ betragen.
b) Für welche Produktionsmenge entstehen Gesamtkosten von $1200\,€$?
c) Bestimme die Gewinnzone und den größten Gewinn, wenn die produzierte Menge zum Stückpreis von $85\,€$ verkauft wird.
d) Wie groß ist der mittlere Kostenzuwachs im Intervall $[10;30]$?

Aufgabe A3

Der parabelförmige Brückenbogen einer Brücke hat eine Spannweite von 170 Metern. Im Abstand von $2{,}5$ Meter zum Fußpunkt der Brücke ist der Brückenbogen $6{,}28$ Meter hoch. Wie hoch ist der Brückenbogen?

Aufgabe A4

Das rechteckige Spielfeld beim American Football hat eine Fläche von höchstens $10800\,m^2$. Die Breite ist $30\,m$ kürzer als die Länge.

a) Zeige, dass die Länge folgende Ungleichung erfüllt:
$x^2 - 30x - 10800 \leq 0$
b) Welche Breite darf das Fußballfeld haben, wenn es mindestens $90\,m$ lang sein muss?

Aufgabe A5

Die Fixkosten für die Produktion einer Ware belaufen sich auf 330 Geldeinheiten (GE). Werden 10 Mengeneinheiten (ME) der Ware hergestellt, erhöhen sich die Gesamtkosten um $30\,GE$. Bei $20\,ME$ betragen die Gesamtkosten $410\,GE$. Prüfe, ob die Gesamtkosten durch die Kostenfunktion K mit $K(x) = \frac{1}{10}x^2 + 2x + 330$ richtig beschrieben werden. Wie hoch muss der Preis pro ME festgelegt werden, damit die Nutzenschwelle bei $30\,ME$ liegt? In welchem Bereich wird dann mit Gewinn produziert?

Level 3 – Expert – Blatt 1

Aufgabe A6

Der Gewinn in € wird durch eine ganzrationale Funktion zweiten Grades in Abhängigkeit von der nachgefragten Menge beschrieben. Bei $100\,ME$ ist der Gewinn null. Bei $300\,ME$ ist der Gewinn maximal und beträgt dann $40000\,€$. Bestimme den Funktionsterm für die Gewinnfunktion.

Aufgabe A7

Ein Unternehmen bietet als Monopolist am Markt eine Ware an. Dadurch hängt der Preis (in €) von der nachgefragten Stückzahl ab. Die Erlöskurve ist eine Parabel, welche die x–Achse in $x = 16$ schneidet. Der größtmögliche Erlös beträgt $320\,€$. Bestimme die Erlösfunktion.

Aufgabe A8

Auf einer Teststrecke wird gemessen, wie viel Benzin ein PKW bei gleichbleibender Geschwindigkeit verbraucht. Dabei hängt der Benzinverbrauch b (in Liter pro $100\,km$) quadratisch von der Geschwindigkeit v (in km/h) ab:
Mit welchem Verbrauch ist durchschnittlich bei $120\,km/h$ zu rechnen?

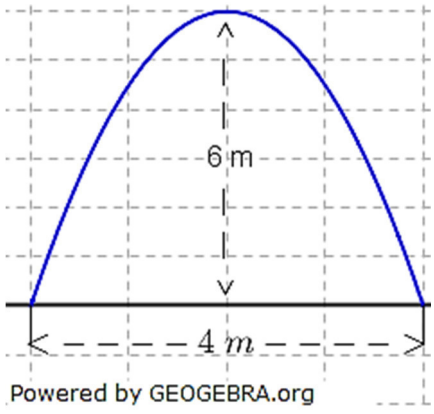
v	30	40	80
b	6,25	6,2	7,0

Aufgabe A9

Ein Zehnkämpfer stößt einer Kugel so, dass die Flugbahn durch folgenden Funktionsterm beschrieben werden kann:
$f(x) = -0{,}0135x^2 + 0{,}142x + 2;\ \ x > 0$. Die Entfernung vom Wurfkreis wird durch x in Meter gemessen, die Funktionswerte geben die Höhe der Kugel an. Berechne die Nullstelle von f. Welche Bedeutung hat diese Nullstelle?
Welche größte Höhe erreicht die Kugel?

Aufgabe A10

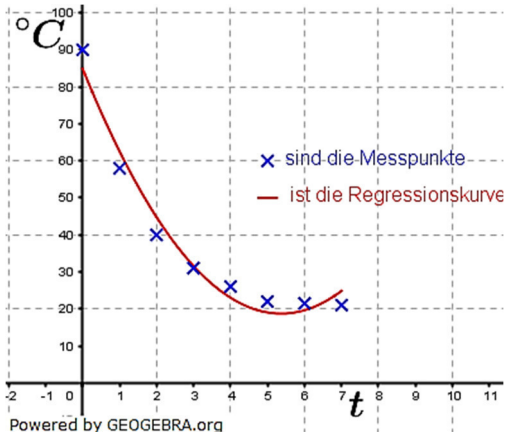
Eine Brückendurchfahrt hat die Form einer Parabel 2. Ordnung. Sie ist $6\,m$ hoch und $4\,m$ breit. Ein Fahrzeug ist $3\,m$ breit und $2{,}20\,m$ hoch.
Kann dieses Fahrzeug noch unter der Brücke durchfahren?



Level 3 – Expert – Blatt 1

Lösung A1

In nebenstehender Grafik sind die blauen Kreuzchen die eingetragenen Messpunkte und die rote Linie der Graph der über die Regression mithilfe des WTR sich ergebenden Funktionsgleichung
$T(t) = 2{,}3t^2 - 24{,}68t + 84{,}92$.



Diese Funktion ist nicht geeignet den Vorgang zu beschreiben, da die Werte des Graphen ab etwa $t = 5$ wieder ansteigen.

Die Vorgehensweise zur Erstellung einer Regression kannst du im
→ „WIKI quadratische Funktionen (Parabel)" nachlesen.

Lösung A2

Lösungshilfe

Aus dem Text der Aufgabenstellung heraus müssen wir die Bedingungen für das Aufstellen der Kostenfunktion als quadratische Funktion feststellen.
Dies sind vor allem:
Die Parabel verläuft durch den Punkt $S_y(0|900)$ (resultierend aus den Fixkosten)
Die Parabel verläuft durch den Punkt $P(10|1050)$ (Gesamtkosten für $10\,ME$)
Die Parabel verläuft durch den Punkt $P(20|1400)$ (Gesamtkosten für $20\,ME$)

a) Funktionsgleichung $K(x) = ax^2 + bx + c$

(I)	$0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 900$	|	Punktprobe mit $S_y(0\|900)$
(II)	$100 \cdot a + 10 \cdot b + 900 = 1050$	|	Punktprobe mit $P(10\|1050)$
(III)	$400 \cdot a + 20 \cdot b + 900 = 1400$	|	Punktprobe mit $P(20\|1400)$
(II)	$100 \cdot a + 10 \cdot b = 150$	|	$\cdot 2$
(III)	$400 \cdot a + 20 \cdot b = 500$		
(II)	$200 \cdot a + 20 \cdot b = 300$		
(III)	$\underline{400 \cdot a + 20 \cdot b = 500}$		
(II)-(III)	$-200 \cdot a = -200$		
	$a = 1$		
$a \to (II)$	$200 \cdot 1 + 20 \cdot b = 300$		
	$20 \cdot b = 100$		
	$b = 5$		

$K(x) = x^2 + 5x + 900$

b) *Produktionsmenge für Gesamtkosten von* 1200 €*:*

$x^2 + 5x + 900 = 1200$
$x^2 + 5x - 300 = 0$
$x_{1,2} = -2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 + 300}$ | p/q-Formel
$x_1 = 15;\quad x_2 = -20$

Bei der Produktion von $15\,ME$ *entstehen Gesamtkosten von* 1200 €*.*

c) *Gewinnzone und größter Gewinn:*
Ein Gewinn errechnet sich aus Erlöse – Kosten, also
$G(x) = E(x) - K(x)$
Bei Verkäufen von 85 € pro ME lautet die Erlösfunktion:
$E(x) = 85x$
$G(x) = 85x - (x^2 + 5x + 900)$
$G(x) = -x^2 + 80x - 900$
$G(x)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel. Die Gewinnzone befindet sich zwischen den beiden Nullstellen, denn dort verläuft der Graph der Funktion oberhalb der x-Achse.
Der größte Gewinn wird durch den Scheitelpunkt dargestellt.
$-x^2 + 80x - 900 = 0$ | $\cdot(-1)$
$x^2 - 80x + 900 = 0$
$x_{1,2} = 40 \pm \sqrt{1600 - 900}$ | p/q-Formel
$x_1 \approx 66{,}46; \quad x_2 \approx 13{,}54$
Die Gewinnzone befindet sich zwischen 14 *und* 66 *verkauften ME.*
Scheitel:
Symmetrieachse bei $x = \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{80}{2} = 40$
$G(40) = -40^2 + 80 \cdot 40 - 900 = -1600 + 3200 - 900 = 700.$
Der größte Gewinn in Höhe von $700\,€$ *wird bei Verkauf und Produktion von* $40\,ME$ *erzielt.*

d) *Mittlere Kostenzuwachs:*
Gesucht ist die mittlere Änderungsrate der Kostenfunktion im Intervall $[10; 30]$.
$\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(30) - K(10)}{30 - 10} = \frac{30^2 + 5 \cdot 30 + 900 - (10^2 + 5 \cdot 10 + 900)}{20} = \frac{1950 - 1050}{20} = \frac{900}{20} = 45$
Der mittlere Kostenzuwachs im Intervall $[10; 30]$ *beträgt* 45 *€/Stück.*

Lösung A3

Lösungshilfe

Aus dem Text der Aufgabenstellung heraus müssen wir die Bedingungen für das Aufstellen der Parabelfunktion des Brückenbogens feststellen. Dabei müssen wir zunächst die Lage des Koordinatensystems bestimmen.
Wir wählen die y-Achse als Symmetrieachse, sodass wir wegen der Gesamtbreite von zwei Nullstellen erhalten, nämlich $N_1(-85|0)$ und $N_2(85|0)$.
Im Abstand von $2{,}5\,m$ zur Nullstelle ist der Brückenbogen $6{,}28\,m$ hoch.
Dies führt uns zu einem weiteren Punkt, nämlich $P(82{,}5|6{,}28)$.
Aufstellung der Funktionsgleichung des Parabelbogens über zwei Nullstellen und einen weiteren Punkt.
$f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$ | Nullstellenform
$f(x) = a \cdot (x - 85)(x + 85)$ | Nullstellen einsetzen
$= a(x^2 - 7225)$
$6{,}28 = a(82{,}5^2 - 7225)$ | Punktprobe mit $P(82{,}5|6{,}28)$
$6{,}28 = -418{,}75a$
$a = -0{,}014997$
$f(x) = -0{,}015 \cdot (x^2 - 7225)$
Symmetrieachse bei $x = 0$
$f(0) = -0{,}015 \cdot (-7225) = 108{,}375$
Der Brückenbogen hat eine Höhe von etwa $108\,m.$

Lösung A4

a) $A_{Rechteck} = x \cdot y$ mit x als Länge und y als Breite.
Laut Aufgabenstellung ist $y = x - 30$.
Die maximale Fläche ist gegeben mit 10800.
Somit ist $A_{Rechteck} = x \cdot (x - 30) \leq 1800$
$x^2 - 30x \leq 10800$
$x^2 - 30x - 10800 \leq 0$

b) $x^2 - 30x - 10800 = 0$
$x_{1,2} = 15 \pm \sqrt{225 + 10800}$ | p/q-Formel
$x_1 = 120;\ \ x_2 = -90$
x_2 entfällt, da hier keine Lösung.
Laut Aufgabenstellung soll x mindestens $90\,m$ lang sein. Daraus folgt:
Länge: $90 \leq x \leq 120$
Breite: $60 \leq x \leq 90$

Lösung A5

Für die Fixkosten muss gelten $K(0) = 330$. Für $10\,ME$ muss gelten $K(10) = 360$ und für $20\,ME$ muss gelten $K(20) = 410$.
$K(0) = 330$
$K(10) = \frac{1}{10}(10)^2 + 2 \cdot 10 + 330 = 360$
$K(20) = \frac{1}{10}(20)^2 + 2 \cdot 20 + 330 = 410$
Die Gesamtkosten werden durch $K(x)$ richtig dargestellt.

Gewinnfunktion = Erlösfunktion minus Kostenfunktion
$G(x) = E(x) - K(x)$
$G(x) = p \cdot x - \left(\frac{1}{10}x^2 + 2x + 330\right) = -\frac{1}{10}x^2 + x \cdot (p - 2) - 330$
Nutzenschwelle 30 bedeutet $G(30) = 0$.
$-\frac{1}{10} \cdot (30)^2 + 30 \cdot (p - 2) - 330 = 0$
$30p = 90 + 60 + 330 = 480$
$p = 16$
Bei einem Verkaufserlös von $16\,GE$ pro ME liegt die Nutzenschwelle bei $30\,ME$.

Gewinnfunktion für $16\,\mathrm{GE}$ pro ME:
$G(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 14x - 330$
$-\frac{1}{10}x^2 + 14x - 330 = 0$ | $\cdot(-10)$
$x^2 - 140x + 3300 = 0$
$x_{1,2} = 70 \pm \sqrt{4900 - 3300}$ | p/q-Formel
$x_1 = 30;\ \ x_2 = 110$
Im Bereich zwischen $30\,ME$ und $110\,ME$ wird bei $16\,GE$ pro ME mit Gewinn gearbeitet.

Lösung A6

Lösungshilfe

Aus dem Text der Aufgabenstellung heraus müssen wir die Bedingungen für das Aufstellen der Parabelfunktion der Gewinnfunktion feststellen. Wir stellen fest, dass maximaler Gewinn bei $300\,ME$ mit $40000\,€$ Gewinn ist, also ist der Scheitel $S(300|40000)$. Des Weiteren haben wir die Gewinnschwelle (=Nullstelle der Funktionsgleichung) mit $N_1(100|0)$ und damit wegen der Symmetrieachse bei $x = 300$ die zweite Nullstelle mit $N_2(500|0)$.

$G(x) = a(x-100)(x-500)$
$40000 = a \cdot (200) \cdot (-200) = -40000$
$a = -1$
$G(x) = -(x-100)(x-500) = -x^2 + 600x - 50000$

Lösung A7

Lösungshilfe

Aus dem Text der Aufgabenstellung heraus müssen wir die Bedingungen für das Aufstellen der Parabelfunktion der Erlösfunktion feststellen.
Es ist einleuchtend, dass bei null Verkäufen der Erlös ebenfalls null ist, also haben wir eine Nullstelle $N_1(0|0)$. Weiterhin ist die zweite Nullstelle gegeben mit $N_2(16|0)$. Der Größte Erlös liegt im Scheitel mit $320\,€$. Die Symmetrieachse liegt bei $x = 8$ und damit der Scheitel bei $S(8|320)$.

$E(x) = a \cdot (x-8)^2 + 320$ | Scheitelform
$0 = a \cdot (-8)^2 + 320$ | Punktprobe mit $N_1(0|0)$
$64a = -320$
$a = -5$
$E(x) = -5 \cdot (x-8)^2 + 320 = -5x^2 + 80x$

Lösung A8

Lösungshilfe

Zur Aufstellung der Parabelfunktion des Benzinverbrauchs haben wir drei Punkte gegeben (siehe Tabelle). Wir bilden über diese drei Punkte eine quadratische Regression.

$b(v) = rx^2 + sx + t$
Punkte $P(30|6{,}25)$, $P(40|6{,}2)$ und $P(80|7)$
Funktionsgleichung über Regression:
$b(v) = 0{,}0005v^2 - 0{,}04v + 7$
Die Vorgehensweise zur Erstellung einer Regression kannst du im
→ „WIKI quadratische Funktionen (Parabel)" nachlesen.
Durchschnittlicher Verbrauch bei $120\,km/h$*:*
$b(120) = 0{,}0005 \cdot 120^2 - 0{,}04 \cdot 120 + 7 = 9{,}4$

Hinweis:

Der Scheitel der Parabel befindet sich bei $S(40|6{,}2)$. Man kann bei einer Geschwindigkeit von $40\,km/h$ mit dem geringsten Verbrauch von $6{,}2$ Liter auf $100\,km$ rechnen.

Lösung A9

Nullstelle von f für $x > 0$:

$-0{,}0135x^2 + 0{,}142x + 2 = 0 \quad | \quad :(-0{,}0135)$

$x^2 - 10{,}52x - 148{,}15 = 0$

$x_{1,2} = 5{,}26 \pm \sqrt{27{,}6676 + 148{,}15} \quad | \quad p/q$-Formel

$x_1 = 18{,}52$

Wegen $x > 0$ ist x_2 hier nicht relevant.

Die Nullstelle bei $x_1 = 18{,}52$ entspricht der Wurfweite des Kugelstoßers in Metern.

Größte Höhe der Kugel:

Größte Höhe wird im Scheitelpunkt erreicht.

$f(x) = -0{,}0135x^2 + 0{,}142x + 2 \quad | \quad :(-0{,}0135)$

$-\frac{f(x)}{0{,}0135} = x^2 - 10{,}52x - 148{,}15$

$-\frac{f(x)}{0{,}0135} = (x - 5{,}26)^2 - 27{,}6676 - 148{,}15 \quad |$ quadratische Ergänzung

$-\frac{f(x)}{0{,}0135} = (x - 5{,}26)^2 - 172{,}8176 \quad | \quad \cdot(-0{,}0135)$

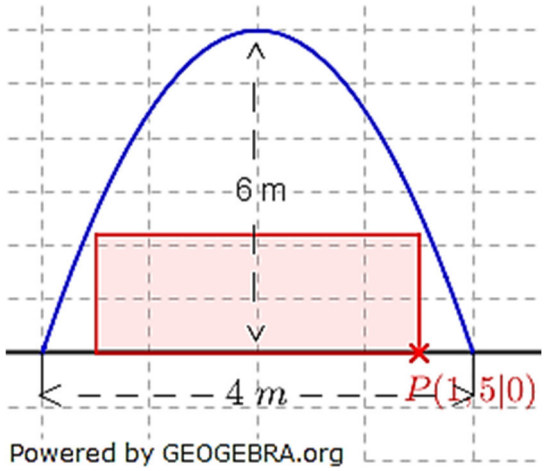
$f(x) = -0{,}0135(x - 5{,}26)^2 + 2{,}373$

$S(5{,}26|2{,}37)$

Die Kugel erreicht ein maximale Höhe von $2{,}37\ m$.

Lösung A10

Die rechte Grafik verdeutlicht die Situation:



Aufstellung der Funktionsgleichung der Parabel:

$N_1(-2|0);\ N_2(2|0);\ S(0|6)$

$p(x) = a(x + 2)(x - 2) = ax^2 - 4a$

$6 = a(-4)$

$a = -\frac{3}{2}$

$p(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6$

Wenn das Fahrzeug in der Mitte fährt, ist sein rechter Rand bei $P(1{,}5|0)$, die obere rechte Ecke bei $P(1{,}5|2{,}2)$.

Ist $p(1{,}5) > 2{,}20$, kann das Fahrzeug unter der Brücke durchfahren.

$p(1{,}5) = -\frac{3}{2}(1{,}5)^2 + 6$

$p(1{,}5) = 2{,}625$

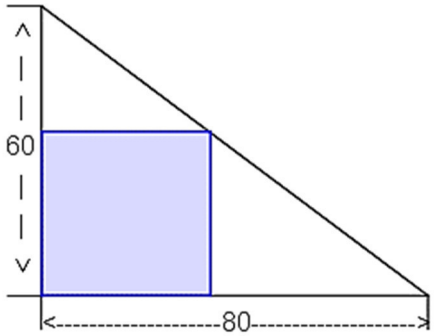
Das Fahrzeug kann unter der Brücke durchfahren.

Level 3 – Expert – Blatt 2

Dokument mit 9 Aufgaben

Aufgabe A1

Auf einem dreieckigen Grundstück mit den Kantenlängen 60 m und 80 m soll ein möglichst großer rechteckiger Bauplatz abgesteckt werden. Berechne dessen Seitenlängen a und b.



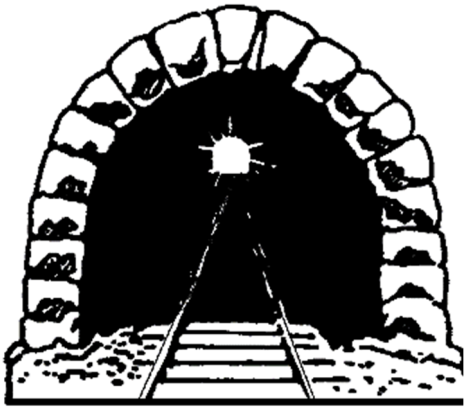
Aufgabe A2

Ein Eisenbahntunnel hat die Form einer Parabel mit einer Breite von $8\,m$ und einer Höhe von $6\,m$.

a) Bestimme eine quadratische Funktion f, deren Graph die Tunneleinfahrt beschreibt.

b) Zeichne die Tunneleinfahrt im Maßstab 1:100.

c) Es soll ein neues Zugmodell entwickelt werden, welches den Tunnel durchfahren kann. Dessen Waggons sind $3{,}20\,m$ breit und $3{,}50\,m$ hoch.
Wie weit muss die Schienenmitte vom rechten Tunnelrand für diesen Zug mindestens entfernt sein?



Aufgabe A3

Der Berliner Bogen in Hamburg ist ein Kongress- und Bürozentrum. Die Frontansicht ist parabelförmig mit einer Höhe von $36\,m$ und einer Breite von ca. $72\,m$.

a) Fertige im Maßstab 1:500 eine Planskizze an. Gib zwei Koordinatensysteme zur Beschreibung der Parabel an und bestimme jeweils den zugehörigen Funktionsterm.

b) Das Erdgeschoss mit einer Höhe von $6\,m$ ist gefolgt von 6 Stockwerken mit je $4\,m$ Höhe. Berechne die Gesamtbreite der Böden für die einzelnen Stockwerke.

Level 3 – Expert – Blatt 2

Aufgabe A4

Ein Freizeitpark hat bei einem Eintrittspreis von $28\,€$ im Durchschnitt täglich 1600 Besucher. Ein Marktforschungsinstitut ermittelt:
Wenn man die Eintrittspreise um $0{,}50\,€$, $1{,}00\,€$, $1{,}50\,€$ und $2{,}00\,€$ usw. senken würde, so stiege die tägliche Besucherzahl um 40, 80, 120, 160 usw. an.

a) Stelle die täglichen Einnahmen E (in €) in Abhängigkeit von der Preissenkung x (in €) durch eine Funktionsgleichung dar.

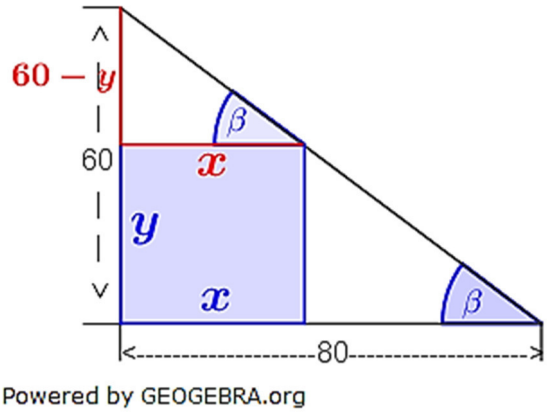
b) Wie hoch sind die täglichen Einnahmen, wenn der Eintrittspreis $22\,€$ beträgt?

c) Welchen Eintrittspreis müsste der Freizeitpark verlangen, damit die Einnahmen möglichst hoch sind?
Wie hoch sind die Einnahmen dann?

Level 3 – Expert – Blatt 2

Lösung A1

Fläche des Rechteckigen Bauplatzes:
$A_{Bauplatz} = Länge\ x\ Breite$.
Die Länge sei x, die Breite sei y.
$A = x \cdot y$
Eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Wir müssen also eine Unbekannte durch die andere Unbekannte ausdrücken.
Hierzu gilt nach dem zweiten Strahlensatz:



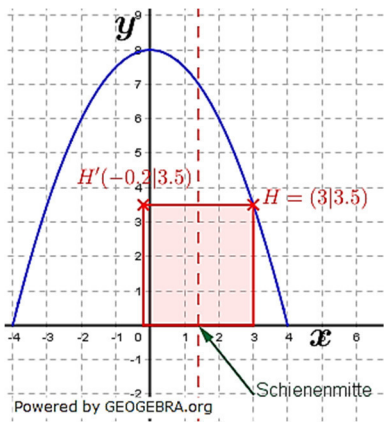
$\frac{60-y}{x} = \frac{60}{80}$
$60 - y = \frac{3}{4}x$
$y = 60 - \frac{3}{4}x$
Wer sich aber mit dem 2. Strahlensatz nicht mehr auskennt, kann das hier auch trigonometrisch machen, denn es gilt:
$\tan(\beta) = \frac{60-y}{x}$ und
$\tan(\beta) = \frac{60}{80}$
Also ist $\frac{60-y}{x} = \frac{60}{80}$ wie beim zweiten Strahlensatz.
$A(x) = x \cdot \left(60 - \frac{3}{4}x\right) = -\frac{3}{4}x^2 + 60x$
Die Fläche des Bauplatzes ist also eine quadratische Funktion, deren Maximum im Scheite liegt.

$A(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 60x$ | $\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$
$-\frac{4}{3}A(x) = x^2 - 80x = (x-40)^2 - 1600$ | quadratische Ergänzung
$-\frac{4}{3}A(x) = (x-40)^2 - 1600$ | $\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$
$A(x) = -\frac{3}{4}(x-40)^2 + 1200$
$S(40|1200)$
$y = 60 - \frac{3}{4}40 = 30$

Bei einem Rechteck mit den Kantenlängen $40\,m$ *und* $30\,m$ *ist das Baugrundstück mit* $1200\,m^2$ *maximal.*

Lösung A2

a) Wir legen das Tunnelprofil symmetrisch zur y-Achse
Dann handelt es sich um eine in y-Richtung um 8 Einheiten nach oben verschobene Parabel mit den Nullstellen $N_1(-4|0)$ und $N_2(4|0)$.
$f(x) = ax^2 + 8$
$0 = 16a + 8$
$16a = -8$
$a = -\frac{1}{2}$
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8$



b) Siehe Grafik zuvor.

c) Die linke obere Ecke des Zuges darf den Parabelbogen nicht berühren. Der Zug ist nach Aufgabenstellung $3{,}5\,m$ hoch.

$3{,}5 = -\frac{1}{2}x^2 + 8$

$\frac{1}{2}x^2 = 4{,}5$

$x^2 = 9$

$x_{1,2} = \pm 3$

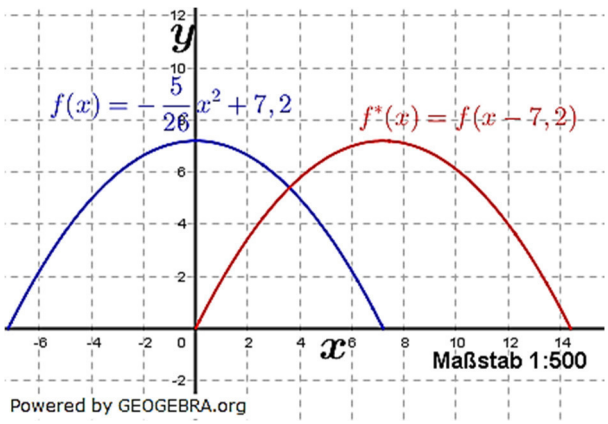
Wegen Aufgabenstellung „vom rechten Tunnelrand entfernt" ist hier $x_1 = 3$ Anzuwenden.

Bei einer Breite von $3{,}2\,m$ muss die Schienenmitte bei $x_M = 3 - \frac{3{,}2}{2} = 1{,}4\,m$ liegen. Da dann Kollisionsgefahr besteht, nehmen wir einen Sicherheitsabstand von $0{,}1\,m$ an, was zu einer Schienenmitte von $x_m = 1{,}3\,m$ führt.

Damit muss die Schienenmitte $1{,}7\,m$ vom rechten Rand entfernt sein.

Lösung A3

a) Nebenstehende Grafik zeigt zwei Möglichkeiten der Darstellung in einem Koordinatensystem. $f(x)$ ist dabei symmetrisch zur y-Achse gelegt, während $f^*(x)$ eine um $7{,}2\,LE \triangleq 36\,m$ nach rechts verschobene $f(x)$ ist.



Gleichung für f:

$f(x) = ax^2 + 7{,}2$

$0 = 7{,}2^2 \cdot a + 7{,}2$

$7{,}2^2 a = -7{,}2$

$a = -\frac{1}{7{,}2} = -\frac{5}{36}$

$f(x) = -\frac{5}{36}x^2 + 7{,}2$

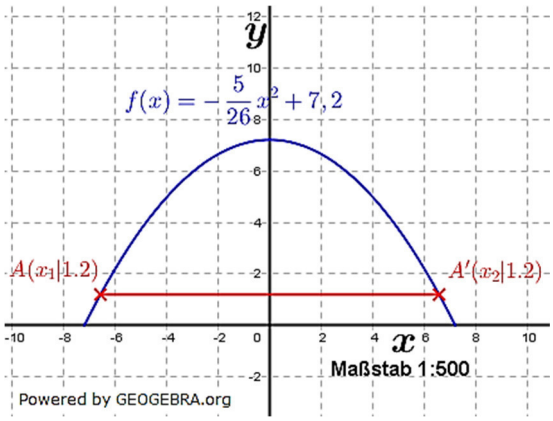
Gleichung für f^*:

$f^*(x) = -\frac{5}{36}(x - 7{,}2)^2 + 7{,}2$

$f^*(x) = -\frac{5}{36}x^2 + 2x$

b) Für Aufgabenteil b) verwenden wir die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{5}{36}x^2 + 7{,}2$

Gesucht sind die Längen der Böden für die einzelnen Etagen, exemplarisch für das erste Stockwerk in nebenstehender Grafik eingezeichnet.



Höhe des Erdgeschosses ist $6\,m$, bei Maßstab $1:500$ ist somit $y = 1{,}2$.

$1{,}2 = -\frac{5}{36}x^2 + 7{,}2$

$-\frac{5}{36}x^2 = -6$

$x^2 = \frac{218}{5}$

$x_{1,2} = \pm 6{,}603$

Die Länge des Bodens zwischen Erdgeschoß und erster Etage beträgt etwa $13{,}2\ LE$ *entsprechend* $66\ m$.
Weitere Stockwerke haben jeweils $4\ m$ entsprechend $0{,}8\ LE$.
Gesucht sind somit die Bodenlängen in den Höhen:

1./2. Etage: $y = 2{,}0$
2./3. Etage: $y = 2{,}4$
3./4. Etage: $y = 2{,}8$
4./5. Etage: $y = 3{,}2$
5./6. Etage: $y = 3{,}6$

1./2. Etage:

$2{,}0 = -\frac{5}{36}x^2 + 7{,}2 \Rightarrow \frac{5}{36}x^2 = 5{,}2;\ x_{1,2} = \pm 6{,}12$

Länge des Bodens: $12{,}24\ LE \triangleq 61{,}2\ m$

2./3. Etage:

$2{,}4 = -\frac{5}{36}x^2 + 7{,}2 \Rightarrow \frac{5}{36}x^2 = 4{,}8;\ x_{1,2} = \pm 5{,}88$

Länge des Bodens: $11{,}76\ LE \triangleq 58{,}8\ m$

3./4. Etage:

$2{,}8 = -\frac{5}{36}x^2 + 7{,}2 \Rightarrow \frac{5}{36}x^2 = 4{,}4;\ x_{1,2} = \pm 5{,}63$

Länge des Bodens: $11{,}26\ LE \triangleq 56{,}3\ m$

4./5. Etage:

$3{,}2 = -\frac{5}{36}x^2 + 7{,}2 \Rightarrow \frac{5}{36}x^2 = 4;\ x_{1,2} = \pm 5{,}37$

Länge des Bodens: $10{,}74\ LE \triangleq 53{,}7\ m$

5./6. Etage:

$3{,}6 = -\frac{5}{36}x^2 + 7{,}2 \Rightarrow \frac{5}{36}x^2 = 3{,}6;\ x_{1,2} = \pm 5{,}09$

Länge des Bodens: $10{,}18\ LE \triangleq 50{,}9\ m$

Lösung A4

Lösungshilfe

Wir müssen die Erlösfunktion in Abhängigkeit der Preissenkungen aufstellen.
Bei einem Preis von $28\ €$ kommen täglich 1600 Besucher. Ohne Preissenkung wäre die Erlösfunktion $E(x) = 28 \cdot 1600$.
Wird der Preis auf $27{,}50\ €$ gesenkt kämen Besucher mehr. Die Erlösfunktion wäre:
$E(x) = (28 - 0{,}5) \cdot 1600 + (28 - 0{,}5) \cdot 40 = (28 - 0{,}5) \cdot (1600 + 40)$
Nun sollen wir das aber aufstellen für Preissenkungen und nicht nur für eine Preissenkung. Damit erhalten wir $E(x) = (28 - x) \cdot (1600 + 40x)$.

a) Einnahmen ohne Preissenkung: $E(x) = 28 \cdot 1600$.
Einnahmen bei einer Preissenkung: $E(x) = (28 - 0{,}5) \cdot 1600 + (28 - 0{,}5) \cdot 40$
$E(x) = (28 - 0{,}5) \cdot (1600 + 40)$
Einnahmen bei zwei Preissenkung:
$E(x) = (28 - 2 \cdot 0{,}5) \cdot 1600 + (28 - 2 \cdot 0{,}5) \cdot 2 \cdot 40$
$= (28 - 2 \cdot 0{,}5) \cdot (1600 + 2 \cdot 40)$
Einnahmen bei x Preissenkungen, $x \in \mathbb{Z}^+$:
$E(x) = (28 - 0{,}5x) \cdot 1600 + (28 - 0{,}5x) \cdot 40x$
$E(x) = (28 - 0{,}5x) \cdot (1600 + 40x)$
Alternativ bei x Preissenkung in €:
$E(x) = (28 - x) \cdot (1600 + 80x)$

b) Bei Eintrittspreis $20\,€$ ist $x = 8$ in €:
$E(8) = (28 - 8) \cdot (1600 + 80 \cdot 8) = 44800$
Bei einem Eintrittspreis von $20\,€$ *belaufen sich die Tageseinnahmen auf* $44800\,€$.

c) Eintrittspreis für maximale Tageseinnahmen:
Die Funktionsgleichung $E(x) = (28 - x) \cdot (1600 + 80x)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel. Die Maximaleinnahmen liegen somit im Scheitelpunkt S.

$E(x) = (28 - x) \cdot (1600 + 80x) = 44800 + 2240x - 1600x - 80x^2$

$E(x) = -80x^2 + 640x + 44800$ | $:(-80)$

$-\frac{E(x)}{80} = x^2 - 8x - 560$

$-\frac{E(x)}{80} = (x - 4)^2 - 16 - 560$ | quadratische Ergänzung

$-\frac{E(x)}{80} = (x - 4)^2 - 576$ | $\cdot(-80)$

$E(x) = -80(x - 4)^2 + 46080$ | Scheitelform

$S(4|46080)$

Die Tageseinnahmen sind am höchsten, wenn der Eintrittspreis um $4\,€$ gesenkt wird.
Bei einem Eintrittspreis von $24\,€$ sind die Tageseinnahmen mit $46.800\,€$ am größten.

Level 3 – Expert – Blatt 3

Dokument mit 14 Aufgaben

Aufgabe A1

Insgesamt gibt es (mit Stand Oktober 2010) in Deutschland rund $1{,}5$ Millionen Kilometer Stromleitungen. Davon sind etwas weniger als $30\,\%$ sogenannte ‚Hochspannungs-, oder ‚Höchstspannungsleitungen', das sind Leitungen mit Spannungen von 380000, 220000 und 110000 Volt. Ihre Gesamtlänge beträgt rund $116000\,km$. Wegen der sehr hohen Kosten und der schwierigen Wartung bei der unterirdischen Verlegung lassen sich diese praktisch nur oberirdisch verlegen. Im Mittel stehen dazu im Abstand von 300 bis 400 Metern die Masten, zwischen denen die einzelnen Kabel frei hängen.
Die Messung der Höhe des Kabels über dem Boden in verschiedenen Abständen zum Strommast ergab bei einem Hochspannungskabel die folgende Wertetabelle:

Abstand a in Metern	20	40	60	80	100	120
Höhe h in Metern	42,8	39,8	37,2	35	33,2	31,8

Eine quadratische Regression führte zur Funktionsgleichung

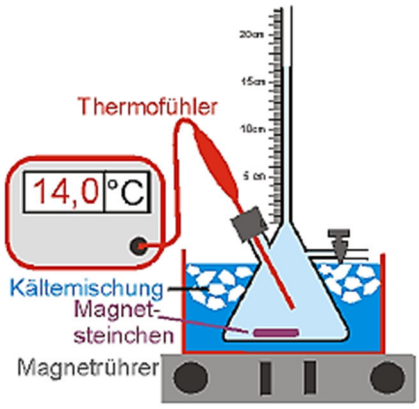
$$h(a) = 0{,}0005a^2 - 0{,}18a + 46{,}2$$

wobei a der Abstand in Metern von einem Hochspannungsmast aus gemessen, sowie $h(x)$ die Höhe der Stromleitung über dem Boden in Metern ist.

a) Überprüfe, ob die gemessenen Wertepaare die Funktionsgleichung dieser quadratischen Funktion erfüllen.
b) Zeichne den Graphen dieser Quadratischen Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem.
c) Gib den y-Achsenabschnitt dieser Quadratischen Funktion mit Maßeinheit an und erläutere die Bedeutung dieses Wertes für den Zusammenhang zwischen dem Abstand und der Höhe.
d) Berechne die Höhe des Kabels über dem Boden im Abstand von $200\,m$ zum Strommast.
e) Berechne, in welchem Abstand zum ersten Strommast der zweite Strommast mit einer Höhe von $46{,}2\,m$ steht.
f) Berechne, in welchem Abstand zum ersten Strommast das Kabel am tiefsten hängt und wie groß dort die Höhe über dem Boden ist.
g) Bekanntlich dehnen sich Hochspannungsleitung im Sommer aufgrund der Hitze aus und ziehen sich im Winter aufgrund der Kälte wieder zusammen. Gib an, welche Parameter des Funktionsterms sich beim Ausdehnen bzw. Zusammenziehen der Hochspannungsleitung ändern und begründe Deine Entscheidung.

Level 3 – Expert – Blatt 3

Aufgabe A2



Wasser verhält sich bei kleinen Temperaturen über einem bestimmten Wert noch genau wie andere Flüssigkeiten: Bei Erhöhung der Temperatur wird die Dichte immer kleiner, bei Verringerung der Temperatur wird die Dichte immer größer. Unterhalb dieses Wertes jedoch hat Wasser eine besondere Eigenschaft, die es von fast allen anderen Flüssigkeiten unterscheidet und die für die Natur eine große Bedeutung hat. Diese spezielle Eigenschaft, die man die **Anomalie des Wassers** nennt, wird untersucht, indem man entsprechend dem rechts abgebildeten Versuchsaufbau eine bestimmte Menge Wasser langsam abkühlt und dabei ständig mit einem Thermofühler die Temperatur und anhand der Messung des Volumens und der Masse des Wassers dessen Dichte bestimmt.
Die Messung von Temperatur und Dichte ergab die folgende Wertetabelle:

Temperatur T in $°C$	10	9	8	7	6	5
Dichte ρ in g/cm^3	0,999712	0,999800	0,999872	0,999928	0,999968	0,999992

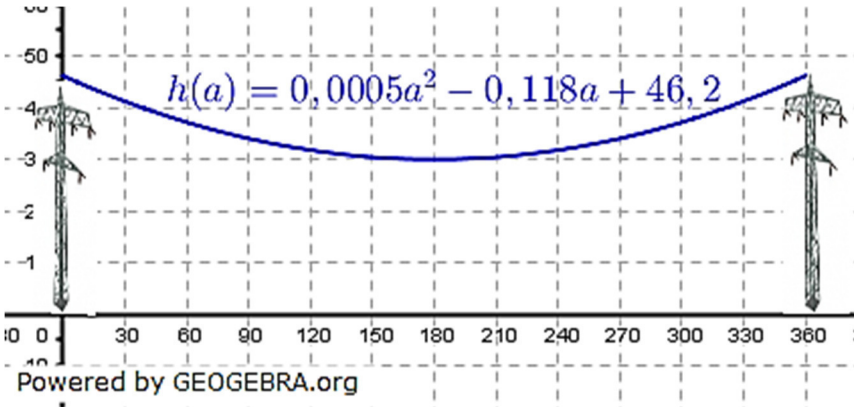
a) Bestimme mit Hilfe von drei Wertepaaren den Funktionsterm dieser Quadratischen Funktion.
b) Überprüfe, ob die anderen gemessenen Wertepaare die Funktionsgleichung dieser Quadratischen Funktion erfüllen.
c) Zeichne den Graphen dieser Quadratischen Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem.
d) Gib den y-Achsenabschnitt dieser Quadratischen Funktion mit Maßeinheit an und erläutere die Bedeutung dieses Wertes für den Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Dichte von Wasser.
e) Berechne die Dichte von Wasser bei einer Temperatur von $7{,}5\,°C$.
f) Berechne die Temperatur von Wasser bei einer Dichte von $0{,}999982\ g/cm^3$.
g) Berechne, bei welcher Temperatur Wasser die größte Dichte hat und wie groß diese Dichte ist. Informiere dich über die Bedeutung dieses Sachverhaltes für die Natur.

Lösung A1

a) Prüfung der gegebenen Funktionsgleichung über die Wertetabelle:

Abstand a in Metern	20	40	60	80	100	120
Höhe h in Metern (gemessen)	42,8	39,8	37,2	35	33,2	31,8
$h(a) = 0{,}0005a^2 - 0{,}18a + 46{,}2$	42,8	39,8	37,2	35	33,2	31,8

b) Grafik siehe rechts.



c) Der y-Achsenabschnitt beträgt $46{,}2\,m$.
Das ist die Höhe über dem Erdboden der Seilaufhängung am Mast.

d) Gesucht ist $h(200)$:
$h(200) = 0{,}0005 \cdot 200^2 - 0{,}18 \cdot 200 + 46{,}2 = 30{,}2$
Die Höhe der Stromleitung in $200\,m$ *Entfernung zu einem Masten beträgt* $30{,}2\,m$ *über dem Erdboden.*

e) Gesucht wird der zweite Wert a_2 für $h(a) = 46{,}2$. Der erste Wert ist bei $a_1 = 0$.
$46{,}2 = 0{,}0005a^2 - 0{,}18a + 46{,}2$
$0{,}0005a^2 - 0{,}18a = 0$
$a(0{,}0005a - 0{,}18) = 0$
$a_1 = 0; \quad a_2 = 360$
Die Masten sind jeweils $360\,m$ *voneinander entfernt.*

f) Das Kabel hängt in der Mitte zwischen zwei Masten am tiefsten (Symmetrieachse der Parabel). Dies ist bei $a = 180\,m$ der Fall.
$h(180) = 0{,}0005 \cdot 180^2 - 0{,}18 \cdot 180 + 46{,}2$
$h(180) = 30$
Das Kabel hängt an der tiefsten Stelle $30\,m$ *über dem Boden.*

g) Infolge des Wärmeausdehnungskoeffizienten von Stoffen verlängert sich das Kabel im Sommer, das heißt, die Parabelform wird schmäler und verkürzt sich im Winter, d.h., die Parabelform wird flacher. Die Aufhängepunkte des Kabels bleiben dieselben.
Wir bestimmen die Beeinflussung der Parabelgleichung über die Veränderung des Scheitels, der sich aus den obigen Berechnungen zu $S(180|30)$ ergeben hat. Durch Wärme / Kälte ändert sich die Höhe des tiefsten Punktes. Je nach Wetterlage liegt dieser somit bei $S(180|k \cdot 30)$. Im Sommer ist $k < 1$ (Tiefster Punkt wird kleiner), im Winter ist $k > 1$ (tiefster Punkt wird größer).

$h(a) = b(x - 180)^2 + 30k$ | Scheitelform mit $S(180|k \cdot 30)$
$46{,}2 = b(0 - 180)^2 + 30k$ | Punktprobe mit $P(0|46{,}2)$ (Aufhängung)
$46{,}2 = 32400b + 30k$
$46{,}2 - 30k = 32400b$
$b = \frac{46{,}2 - 30k}{32400}$

$h(a) = \frac{46{,}2-30k}{32400}(a-180)^2 + 30k$

$= \frac{46{,}2-30k}{32400}a^2 - \frac{46{,}2-30k}{360}a + \frac{46{,}2-30k}{32400} \cdot 32400 + 30k$

$h(a) = \frac{46{,}2-30k}{32400}a^2 - \frac{46{,}2-30k}{360}a + 46{,}2$

Je nach Witterung ändern sich die Koeffizienten von a^2 und a.

Lösung A2

a) Quadratische Funktionsgleichung durch drei Punkte.

Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Punkte:

$Q(10|0{,}999712)$; $R(8|0{,}999872)$; $S(5|0{,}999992)$

(I) $100a + 10b + c = 0{,}999712$ | $\cdot 64$

(II) $64a + 8b + c = 0{,}999872$ | $\cdot 100$ –

(III) $25a + 5b + c = 0{,}999992$

(I) $100a + 10b + c = 0{,}999712$ | $\cdot 25$

(II) $0 - 160b - 36c = -36{,}005632$ –

(III) $25a + 5b + c = 0{,}999992$ | $\cdot 100$

(I) $100a + 10b + c = 0{,}999712$

(II) $0 - 160b - 36c = -36{,}005632$ | $\cdot 250$

(III) $0 - 250b - 75c = -75{,}0064$ | $\cdot 160$ –

(I) $100a + 10b + c = 0{,}999712$

(II) $0 - 160b - 36c = -36{,}005632$

(III) $0 + 0 + 3000c = 3479{,}552$

$3000c = 2999{,}616$

$c = 0{,}999872$

$-160b - 36 \cdot 0{,}999872 = -36{,}005632$

$-160b = -0{,}01024$

$b = 0{,}000064$

$100a + 10 \cdot 0{,}000064 + 0{,}999872 = 0{,}999712$

$100a = -0{,}0008$

$a = -0{,}000008$

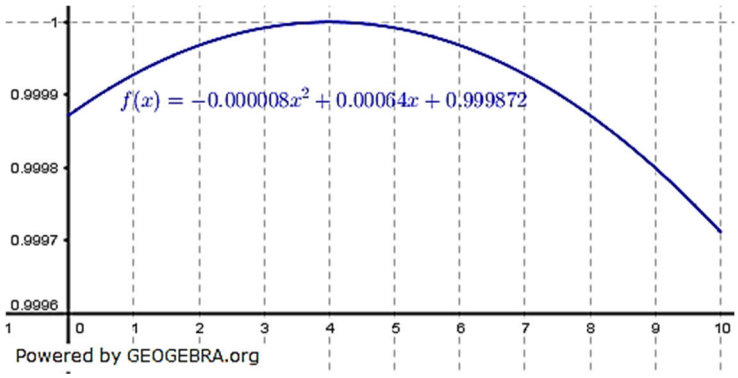
$f(x) = -0{,}000008x^2 + 0{,}000064x + 0{,}999872$

b) Prüfung der anderen Wertepaare über Tabelle:

Temperatur T in $°C$	10	9	8	7	6	5
Dichte ρ in g/cm^3	0,999712	0,999800	0,999872	0,999928	0,999968	0,999992
$f(x) = \cdots$	0,999712	0,999800	0,999872	0,999928	0,999968	0,999992

c) siehe Grafik rechts.

d) Der y-Achsenabschnitt beträgt $0{,}999872\ g/cm^3$. Das ist die Dicht des Wassers (nicht des Eises) bei einer Temperatur von $0\ °C$.



Level 3 – Expert – Blatt 3

e) Gesucht wird $f(7{,}5)$:
$f(7{,}5) = -0{,}000008 \cdot (7{,}5)^2 + 0{,}000064 \cdot 7{,}5 + 0{,}999872 = 0{,}999902$
Die Dichte des Wassers bei $7{,}5\,°C$ beträgt $0{,}999902\ g/cm^3$.

f) Gesucht ist die Temperatur x für $f(x) = 0{,}999982$
$0{,}999982 = -0{,}000008x^2 + 0{,}000064x + 0{,}999872$
$-0{,}000008x^2 + 0{,}000064x - 0{,}00011 = 0 \quad | \quad :(-0{,}000008)$
$x^2 - 8x + 13{,}75 = 0$
$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 13{,}75} = 4 \pm 1{,}5 \quad | \quad p/q$-Formel
$x_1 = 5{,}5; \quad x_2 = 2{,}5$
Wasser hat die Dichte $0{,}999982\ g/cm^3$ bei etwa $5{,}5\,°C$ und bei etwa $2{,}5\,°C$.

g) Die gesuchten Werte befinden sich im Scheitelpunkt der Parabelgleichung.
$f(x) = -0{,}000008x^2 + 0{,}000064x - 0{,}00011 \quad | \quad :(-0{,}000008)$
$-\frac{f(x)}{0{,}000008} = x^2 - 8x + 124984$
$-\frac{f(x)}{0{,}000008} = (x-4)^2 - 16 - 124984 \quad |$ quadratische Ergänzung
$-\frac{f(x)}{0{,}000008} = (x-4)^2 - 125000 \quad | \quad \cdot(-0{,}000008)$
$f(x) = -0{,}000008(x-4)^2 + 1$
Die größte Dichte von Wasser ist $1\ g/cm^3$ bei einer Temperatur von $4\,°C$.

Level 3 – Expert – Blatt 4

Dokument mit 17 Aufgaben

Hinweis:

In diesem Aufgabenblatt befinden sich Aufgaben zu quadratischen Funktionen *mit Parameter* (Parabelscharen).

Aufgabe A1

Gegeben ist für jedes $t \neq 0$ die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = tx^2 + 1;\ x \in \mathbb{R}$.
K_t ist das Schaubild von f_t.

a) Beschreibe den Verlauf in Abhängigkeit von t.
b) Für welche t–Werte schneidet K_t die x-Achse?
c) Bestimme t so, dass die Gerade $y = 4x - 1$ Tangente an K_t ist.

Aufgabe A2

Gegeben ist für jedes t die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{t}{2}x - \frac{t}{4};\ x \in \mathbb{R}$.
K_t ist das Schaubild von f_t.
Für welche t–Werte hat K_t zwei, einen bzw.keinen gemeinsamen Punkt mit der x–Achse? Bestimme gegebenenfalls die Schnittstellen.

Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = x^2 + tx + t;\ x, t \in \mathbb{R}$.
K_t ist das Schaubild von f_t.

a) Zeige durch Rechnung, dass es genau einen gemeinsamen Punkt aller K_t gibt. Bestimme die Koordinaten dieses Punktes.
b) Welche Geraden durch $T(0|-6)$ sind Tangenten an K_{-2}?
c) Zeige: Es gibt keine Parabel K_t, die die Gerade mit $y = -2x$ berührt.

Aufgabe A4

Gegeben ist für jedes $t > 0$ die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = x^2 - 4tx + 3t^2;\ x \in \mathbb{R}$.
K_t ist das Schaubild von f_t.

a) Bestimme die Nullstellen von f_t. Für welche t–Werte schneidet K_t die x–Achse in $x = 1$?
b) Bestimme den kleinsten y–Wert, sodass $P(1|y)$ auf K_t liegt.

Aufgabe A5

Gegeben ist für jedes $t \neq 0$ die Funktion f_t mit $f_t(x) = -\frac{1}{4t}x^2 + t^2;\ x, t \in \mathbb{R};\ t \neq 0$.
K_t ist das Schaubild von f_t.
Nenne Eigenschaften von K_t.

Aufgabe A6

Welchen Einfluss hat der Parameter t auf die Funktinsgraphen?

a) $f_t(x) = t(x^2 - x - 2);\ x \in \mathbb{R}, t \neq 0$
b) $f_t(x) = (x - 2)(t - x);\ x \in \mathbb{R}$
c) $f_t(x) = t(x - 2t)^2;\ x \in \mathbb{R}$

Level 3 – Expert – Blatt 4

Aufgabe A7

Für $t \neq 4$ ist K_t das Schaubild von f_t mit $f_t(x) = \frac{1}{4(t-4)}x^2 + t;\ x\ \in \mathbb{R}$.

a) Zeichne K_3.
b) Welche Frage kann mit der Lösung von $4(t-4) > 0$ beantwortet werden?
c) Bestimme die Nullstellen von f_t. Für welche $t \neq 4$ hat f_t zwei Nullstellen?
d) Zeige: die Gerade g mit $g(x) = x + 4$ ist für $t \neq 4$ Tangente an K_t.

Aufgabe A8

Für jedes reelle t ist die Funktion f_t gegeben mit $f_t(x) = 0{,}25x^2 - tx + 9;\ x\ \in \mathbb{R}$.
Bestimme t so, dass die zugehörige Parabel die x–Achse berührt.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de
© by Fit-in-Mathe-Online.de

Lösung A1

$f_t(x) = tx^2 + 1;\ x \in \mathbb{R}$

a) Verlauf von f_t in Abhängigkeit von t:
Wir erkennen, dass der Parameter t lediglich die Öffnungsrichtung der Parabeln sowie deren Streckung bzw. Stauchung beeinflusst (t ist Koeffizient von x^2). Für $t > 0$ sind die Parabeln nach oben geöffnet, für $t < 0$ sind sie nach unten geöffnet.
Wegen des konstanten absoluten Gliedes 1 schneiden alle Parabeln der Parabelschar die y–Achse in $S_y(0|1)$. Da die Parabelschar in x–Richtung nicht verschoben ist, ist sie achsensymmetrisch zur y–Achse. Der Schnittpunkt $S_y(0|1)$ ist gleichzeitig Scheitelpunkt aller Parabeln der Parabelschar.

b) Wir ermitteln die Schnittpunkte mit der x–Achse.
$f_t(x) = 0 = tx^2 + 1$
$tx^2 + 1 = 0 \quad | \quad -1;:t$
$x^2 = -\frac{1}{t}$
$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{t}}$
Schnittpunkte mit der x–Achse können nur dann entstehen, wenn $-\frac{1}{t} \geq 0$. Da ein Bruch nur dann 0 werden kann, wenn der Zähler 0 wird, im Zähler jedoch eine konstante Zahl steht, scheidet 0 aus.
$-\frac{1}{t}$ wird dann > 0 wenn $t < 0$ ist.
Für alle $t < 0$ schneidet K_t die x-Achse in $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{t}}$.

c) Eine Tangente an eine Kurve ist der Berührpunkt einer Geraden an eine Kurve, eine doppelte Schnittstelle. Schnittstellen von zwei Funktionen ermitteln wir durch Gleichsetzen. Es entsteht ein Tangentenpunkt/Berührpunkt, wenn es nur eine Lösung des gleichgesetzten Systems gibt.
$f_t(x) = 4x - 1$
$tx^2 + 1 = 4x - 1 \quad | \quad -4x;\ +1$
$tx^2 - 4x + 2 = 0$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad | \quad abc$-Formel
$x_{1,2} = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 8t}}{2t}$
Es gibt nur eine Lösung, wenn $4 - 8t = 0$.
$16 - 8t = 0 \quad | \quad -16;:(-8)$
$t = 2 \ \Rightarrow \ x_1 = 1$
$x_1 \Rightarrow y = 4x - 1: \quad y_1 = 4x_1 - 1 = 3$
Die Gerade $y = 4x - 1$ ist Tangente an K_2 im Punkt $T(1|3)$.

Lösung A2

$f_t(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{t}{2}x - \frac{t}{4};\ x \in \mathbb{R}$

Schnittpunkte mit der x-Achse sind Nullstellen, zu berechnen über $f_t(x) = 0$.

$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{t}{2}x - \frac{t}{4} = 0 \quad | \quad \cdot(-2)$

$x^2 + tx + \frac{t}{2} = 0$

$x_{1,2} = -\frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{t^2}{4} - \frac{t}{s}} \quad | \quad p/q\text{-Formel}$

$x_{1,2} = -\frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{t^2-2t}{4}} = -\frac{t}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{t(t-2)}$

Keine Nullstellen, wenn $t(t-2) < 0$

$t(t-2) < 0$ für $0 < t < 2$

Eine Nullstellen, wenn $t(t-2) = 0$

$t(t-2) = 0$ für $t = 0 \vee t = 2$

Zwei Nullstellen, wenn $t(t-2) > 0$

$t(t-2) > 0$ für $-\infty < t < 0 \vee 2 < t < \infty$

Lösung A3

$f_t(x) = x^2 + tx + t;\ x, t \in \mathbb{R}$

a) Ein gemeinsamer Punkt aller K_t ist ein Schnittpunkt. Schnittpunkte bestimmen wir durch Gleichsetzung. Wir bilden:

$f_{t_1}(x) \cap f_{t_2}(x)$

$x^2 + t_1x + t_1 = x^2 + t_2x + t_2$

$t_1x + t_1 = t_2x + t_2 \quad | \quad -t_2x;\ -t_1$

$t_1x - t_2x = t_2 - t_1$

$x(t_1 - t_2) = -(t_1 - t_2) \quad | \quad :(t_1 - t_2)$

$x = -1$

$f_t(-1) = (-1)^2 + t \cdot (-1) + t$

$f_t(-1) = 1$

$S(-1|1)$

Der sich ergebende Schnittpunkt ist unabhängig von t, somit haben alle K_t einen einzigen gemeinsamen Schnittpunkt.

b) $f_{-2}(x) = x^2 - 2x - 2$

Tangente durch $T(0|-6)$ an K_{-2}:

$t(x) = f'_{-2}(u)(x-u) + f_{-2}(u)$

$f_{-2}'(x) = 2x - 2$

$f_{-2}'(u) = 2u - 2$

$f_{-2}(u) = u^2 - 2u - 2$

$t(x) = (2u-2) \cdot (x-u) + u^2 - 2u - 2$

$-6 = (2u-2) \cdot (-u) + u^2 - 2u - 2 \quad |$ Punktprobe mit

$-2u^2 + 2u + u^2 - 2u - 2 = -6 \quad |$ mit $T(0|-6)$

$-u^2 - 2 = -6$

$u^2 = 4$

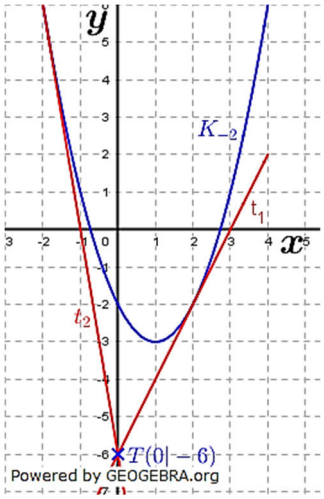
$u_{1,2} = \pm 2$

$t_1(x) = (2 \cdot 2 - 2) \cdot (x-2) + 2^2 - 2 \cdot 2 - 2$

$t_1(x) = 2 \cdot (x-2) - 2 = 2x - 6$

$t_2(x) = (2 \cdot (-2) - 2) \cdot (x+2) + (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 2$

$t_1(x) = -6 \cdot (x+2) + 6 = -6x - 6$



c) Kein gemeinsamer Punkt aller K_t mit $y=-2x$: Wir bilden $K_t \cap y=-2x$

$K_t \cap y=-2x$

$x^2+tx+t=-2x$

$x^2+x(t+2)+t=0$

$x_{1,2}=\frac{t+2}{2}\pm\sqrt{\frac{(t+2)^2}{4}-t}$ | p/q-Formel

$x_{1,2}=\frac{t+2}{2}\pm\sqrt{\frac{t^2+4t+4-4t}{4}}=\frac{t+2}{2}\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{t^2+4}$

Es gibt kein , sodass $t^2+4=0$ ist. Somit gibt es immer zwei Schnittpunkte und damit keinen Berührpunkt.

Lösung A4

$f_t(x)=x^2-4tx+3t^2;\ x\in\mathbb{R}$

a) Nullstellen von f_t:

$x^2-4tx+3t^2=0$

$x_{1,2}=2t\pm\sqrt{4t^2-3t^2}$ | p/q-Formel

$x_{1,2}=2t\pm t$

$x_1=3t,\quad x_2=t$

Nullstellen: $N_1(3t|0);\quad N_2(t|0)$

Wert von t für $N_t(1|0)$:

Aus $N_1(3t|0)$ ergibt sich $N_{\frac{1}{3}}(1|0)$.

Aus $N_2(t|0)$ ergibt sich $N_1(1|0)$.

b) Kleinster y–Wert, sodass $P(1|y)$ auf K_t

Gesucht wird kleinstes $f_t(1)$.

$f_t(1)=1^2-4t\cdot 1+3t^2$

$f_t(1)=3t^2-4t+1$

$3t^2-4t+1$ ist eine nach oben geöffnete Parabel. Der kleinste t-Wert liegt im Scheitel.

$g(t)=3t^2-4t+1$ | :3

$\frac{1}{3}g(t)=t^2-\frac{4}{3}t+\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}g(t)=\left(t-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}$ | quadratische Ergänzung

$\frac{1}{3}g(t)=\left(t-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}$ | $\cdot 3$

$g(t)=3\cdot\left(t-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$

Scheitel $S\left(\frac{2}{3}\middle|-\frac{1}{3}\right)$

Für $t=\frac{2}{3}$ ergibt sich der kleinste Wert von y zu $f_{\frac{2}{3}}(1)=-\frac{1}{3}$.

Lösung A5

$f_t(x)=-\frac{1}{4t}x^2+t^2;\ x,t\,\mathbb{R};\ t\neq 0$

Die Parabelschar K_t ist symmetrisch zur y–Achse und schneidet die positive y–Achse in $S_y(0|t^2)$, dem Scheitel. K_t ist für $t>0$ nach unten geöffnet und verläuft aus dem III. Quadranten in den IV. Quadranten. Für $t<0$ ist K_t nach oben geöffnet und verläuft aus dem II. Quadranten in den I. Quadranten.

Lösung A6

a) $f_t(x) = t(x^2 - x - 2);\ x \in \mathbb{R}, t \neq 0$
t bewirkt eine Streckung in y–Richtung, da sich die Nullstellen nicht verändern, sich der y–Achsenabschnitt jedoch mit t verändert. $t < 0$ bewirkt zusätzlich eine Spiegelung an der x–Achse.

b) $f_t(x) = (x - 2)(t - x);\ x \in \mathbb{R}$
Die erste Nullstelle ist fix bei $x = 2$; die zweite Nullstelle ist abhängig von t. K_t ist eine Normalparabelschar nach unten geöffnet.

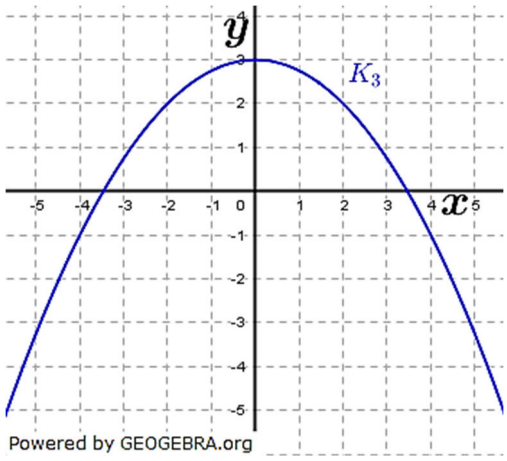
c) $f_t(x) = t(x - 2t)^2;\ x \in \mathbb{R}$
Die Normalparabel wird in y–Richtung gestreckt mit Faktor t und in x–Richtung verschoben um $2t$. Die Parabel ist für $t < 0$ nach unten, für $t > 0$ nach oben geöffnet.

Lösung A7

$f_t(x) = \frac{1}{4(t-4)}x^2 + t;\ x \in \mathbb{R}$

a) Zeichnung siehe Grafik rechts.

b) „Für welche Werte von ist die Parabel nach oben geöffnet".



c) Nullstelen von f_t mit $f_t(x) = 0$:
$\frac{1}{4(t-4)}x^2 + t = 0 \quad | \quad \cdot 4(t-4)$
$x^2 + 4t \cdot (t-4) = 0$
$x^2 = 4t \cdot (4-t)$
$x_{1,2} = \pm 2 \cdot \sqrt{t \cdot (4-t)}$
f_t hat zwei Nullstellen für:
$t \cdot (4-t) > 0 \Rightarrow 0 < t < 4$

d) $f_t(x) \cap g(x)$
$x + 4 = \frac{1}{4(t-4)}x^2 + t \quad | \quad \cdot 4(t-4)$
$(x+4) \cdot 4(t-4) = x^2 + 4t(t-4)$
$4 \cdot (tx - 4x + 4t - 16) = x^2 + 4t^2 - 16t$
$4tx - 16x + 16t - 64 = x^2 + 4t^2 - 16t$
$x^2 - x(4t - 16) + 4t^2 - 32t + 64 = 0$
$x_{1,2} = 2t - 8 \pm \sqrt{(2t-8)^2 - 4t^2 + 32t - 64}$
$x_{1,2} = 2t - 8 \pm \sqrt{4t^2 - 32t + 64 - 4t^2 + 32t - 64}$
$x_{1,2} = 2t - 8 \pm \sqrt{0}$
Es gibt nur einen Schnittpunkt, da die Diskriminante Null ist. Somit ist $g(x) = x + 4$ Tangente an f_t für alle $t \neq 4$.

Lösung A8

$f_t(x) = 0{,}25x^2 - tx + 9;\ x \in \mathbb{R}$
t für Berührpunkt von f_t mit der x-Achse:
Ein Berührpunkt mit der x-Achse ist eine doppelte Nullstelle.
$0{,}25x^2 - tx + 9 = 0 \quad | \quad \cdot 4$
$x^2 - 4tx + 36 = 0$
$x_{1,2} = 2t \pm \sqrt{4t^2 - 36} \quad | \quad p/q$-Formel
Doppelte Nullstelle für $4t^2 - 36 = 0$:
$4t^2 - 36 = 0;\ \Rightarrow\ t_{1,2} = \pm 3$
f_3 bzw. f_{-3} berührt die x-Achse.

Level 3 – Expert – Blatt 5

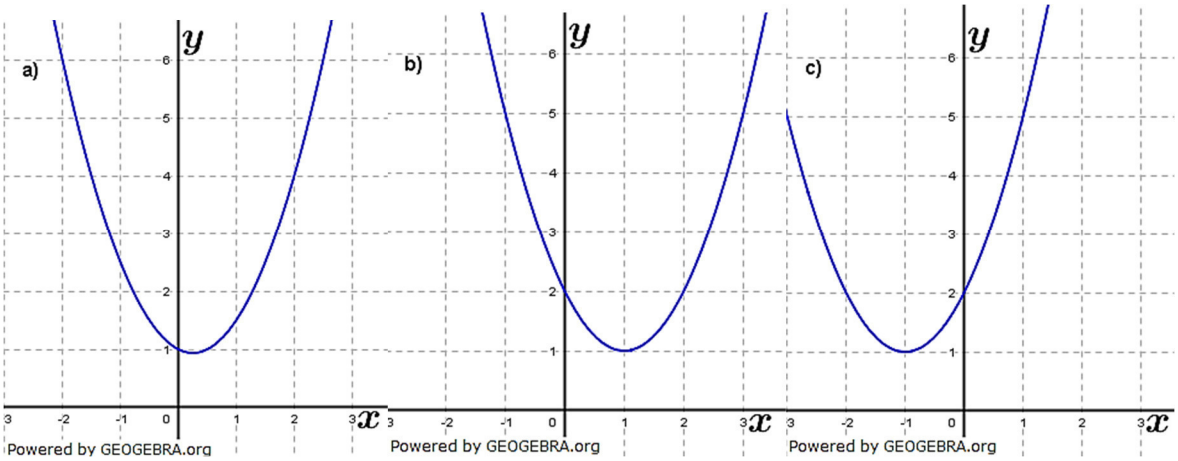
Dokument mit 22 Aufgaben

Hinweis:

In diesem Aufgabenblatt befinden sich Aufgaben zu quadratischen Funktionen *mit Parameter* (Parabelscharen).

Aufgabe A1

Gegeben ist f_t mit $f_t(x) = x^2 - 0{,}5t^2x + t;\ x, t \in \mathbb{R}$.
Welche der nachfolgend abgebildeten Schaubilder gehören zu einer Funktion f_t, welche nicht? Begründe deine Entscheidung und ermittle gegebenenfalls den zugehörigen Wert von t.



Aufgabe A2

Gegeben ist für jedes $a \neq 0$ die Funktions f_a mit $f_a(x) = \frac{a}{2}x^2 - ax;\ x \in \mathbb{R}$.
K_a ist das Schaubild von f_a.

a) Betrachten Sie K_a für verschiedene Werte von a und geben Sie drei gemeinsame Eigenschaften an.
b) Für welchen Wert von a ist die 1. Winkelhalbierende Tangente an K_a?
c) Für welchen Wert von a ist 3 der größte Funktionswert?

Aufgabe A3

Gegeben ist für $t \in \mathbb{R}$ die Funktion f_t mit $f_t(x) = \frac{4}{9}(x-6)(x-t);\ x \in \mathbb{R}$.
K_t ist das Schaubild von f_t.

a) Zeichne K_t für drei verschiedene Werte von t.
b) Wo schneidet K_t die Koordinatenachsen?
Für welchen t–Wert hat f_t genau eine Nullstelle? Interpretiere.
c) Der Schnittpunkt von K_t mit der x–Achse und der Punkt $S(3|-t)$ sind für $0 < t < 6$ die Eckpunkte eines Dreiecks mit dem Inhalt $A(t)$. Bestimme t so, dass $A(t) = 4$ ist.
d) Welche Ursprungsgerade ist Tangente an K_0?

Aufgabe A4

Bestimme die gemeinsamen Punkte der folgenden Funktionen in Abhängigkeit von t:

a) $f_t(x) = t \cdot (x-1)^2$ und $g(x) = 1$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $f_t(x) = x^2 + 4t - 2t^2$ und $g(x) = -x^2 + 4x$ mit $t \in \mathbb{R}$

Aufgabe A5

Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$ und $g_t(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + t; t \in \mathbb{R}$.

a) Berechne alle Achsenschnittpunkte von f.

b) Berechne alle Achsenschnittpunkte von g_t in Abhängigkeit von t.

c) Für welche t haben die Schaubilder von f und g_t
- zwei Schnittpunkte
- einen Berührpunkt
- keinen gemeinsamen Punkt?

Aufgabe A6

Welchen Wert muss t annehmen, damit das Schaubild der Funktion $f_t(x) = tx^2 + (t+1)x$ die Gerade $g(x) = -1$ gerade berührt?
Bestimme die Koordinaten des Berührpunktes.

Aufgabe A7

Welchen Wert muss t annehmen, damit das Schaubild der Funktion $f_t(x) = x^2 - tx + 72$ die nach unten geöffnete Normalparabel $p(x) = -x^2$ gerade berührt?
Bestimme die Koordinaten des Berührpunktes.

Aufgabe A8

Bestimme die Gleichung der Ortskurve der Scheitelpunkte von f_t und zeichne die Ortskurve und die Schaubilder von f_t für $t \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

a) $f_t(x) = 2x^2 - 2tx + \frac{t^2}{4} + 1$ für $-3 \le x \le 3$ und $-2 \le y \le 4$

b) $f_t(x) = 2x^2 - 2tx + \frac{t^2}{4} + t - 1$ für $-3 \le x \le 3$ und $-7 \le y \le -2$

c) $f_t(x) = -2x^2 + 2tx - \frac{t^2}{4} + t + 1$ für $-3 \le x \le 3$ und $-2 \le y \le 7$

d) $f_t(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2tx + 4t - 1$ für $-2 \le x \le 6$ und $-2 \le y \le 6$

Aufgabe A9

Auf einer Cerealienpackung ist der Zugangscode für ein low-cost (d.h. von einem Informatikkurs programmierten) Computerspiel abgedruckt, dessen Hintergrundlandschaft durch die Parabeln $f_t(x) = -\frac{t}{2}x^2 + t^2x - \frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{2} + 2$ beschrieben wird.
Skizziere die Parabeln für $t \in \{\pm 2; \pm 1; 0\}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem und zeige rechnerisch, dass die Ortskurve der Scheitelpunkte sich durch die Gleichung $o(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ beschreiben lässt.

Lösung A1

$f_t(x) = x^2 - 0{,}5t^2x + t;\ x, t\ \in \mathbb{R}$

a) Der Graph schneidet die y-Achse in $S_y(0|1)$. Dies deutet auf $t = 1$ hin.
Die Funktionsgleichung wäre dann $f_1(x) = x^2 - 0{,}5x + 1$.
Punktprobe mit ablesbarem Punkt $P(2|4)$:
$4 = 2^2 - 0{,}5 \cdot 2 + 1$
$4 = 4$
Bei Abbildung a) ist $t = 1$.

b) Der Graph schneidet die y-Achse in $S_y(0|2)$. Dies deutet auf $t = 2$ hin. Die Funktionsgleichung wäre dann $f_2(x) = x^2 - 2x + 2$.
Punktprobe mit ablesbarem Punkt $P(1|1)$:
$1 = 1 - 2 + 2$
$1 = 1$
Bei Abbildung b) ist $t = 2$.

c) Der Graph schneidet die y-Achse in $S_y(0|2)$. Dies deutet auf $t = 2$ hin. Die Funktionsgleichung wäre dann $f_2(x) = x^2 - 2x + 2$.
Punktprobe mit ablesbarem Punkt $P(-1|1)$:
$1 \stackrel{?}{=} 1 + 2 + 2$
$1 \neq 5$
Abbildung c) ist kein Graph einer Funktion f_t.

Lösung A2

$f_a(x) = \frac{a}{2}x^2 - ax$

a) Eigenschaften für $a = 1$:
$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$
Nach oben geöffnete mit Faktor $k = 0{,}5$ gestreckte Parabel, Symmetrieachse bei $x = 1$, Nullstellen $N_1(0|0);\ N_2(2|0)$, Scheitel bei $S(1|-0{,}5)$.
Eigenschaften für $a = -1$:
$f_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$
Nach unten geöffnete mit Faktor $k = 0{,}5$ gestreckte Parabel, Symmetrieachse bei $x = -1$, Nullstellen $N_1(0|0);\ N_2(-2|0)$, Scheitel bei $S(-1|0{,}5)$.
Eigenschaften für $a = 2$:
$f_2(x) = x^2 - 2x$
Nach unten geöffnete Normalparabel, Symmetrieachse bei $x = 1$, Nullstellen $N_1(0|0);\ N_2(2|0)$, Scheitel bei $S(1|-1)$.

b) Erste Winkelhalbierende $y = x$ als Tangente an K_a:
$f_a(x) \cap x$
$\frac{a}{2}x^2 - ax = x$
$\frac{a}{2}x^2 - x(a+1) = 0 \quad | \quad \cdot\frac{2}{a}$
$x^2 - \frac{2\cdot(a+1)}{a}x = 0$
$x_{1,2} = \frac{2\cdot(a+1)}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{2\cdot(a+1)}{a}\right)^2} \quad |$ p/q-Formel
Bedingung für Berührpunkt: Die Diskriminante muss null sein.
$\frac{2\cdot(a+1)}{a} = 0$
$2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1$
Die erste Winkelhalbierende ist Tangente an K_{-1}.

c) Welches a für $f_a(x)_{max} = 3$:
Ein größter Funktionswert liegt im Scheitel einer nach unten geöffneten Parabel.

$f_a(x) = \frac{a}{2}x^2 - ax$ | $\cdot \frac{2}{a}$
$\frac{2}{a} \cdot f_a(x) = x^2 - 2x$ | bilde im nächsten Schritt die quadratische Ergänzung
$\frac{2}{a} \cdot f_a(x) = (x-1)^2 - 1$ | $\cdot \frac{a}{2}$
$f_a(x) = \frac{a}{2}(x-1)^2 - \frac{a}{2}$

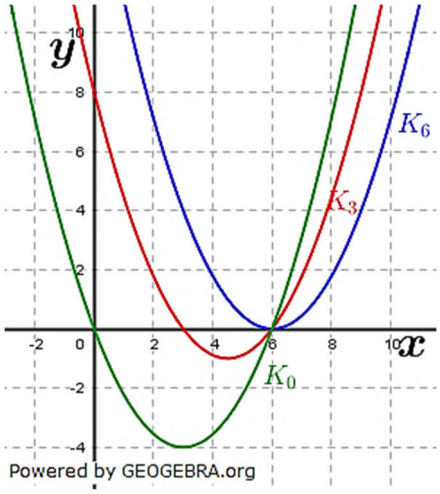
$S_a\left(1\middle|-\frac{a}{2}\right)$

$-\frac{a}{2} = 3$ | Aufgabenstellung
$a = -6$
K_{-6} hat den größten Funktionswert $f_{-6}(1) = 3$.

Lösung A3

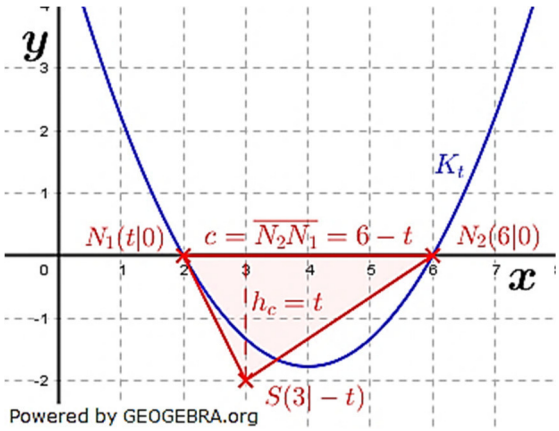
$f_t(x) = \frac{4}{9}(x-6)(x-t)$

a) Zeichnung siehe Grafik rechts.



b) Schnittpunkte Koordinatenachsen:
Nullstellen mit $f_t(x) = 0$.
Die Nullstellenform ist gegeben.
$N_1(6|0);\ N_2(t|0)$
Schnittpunkt y-Achse:
$f_t(0) = \frac{4}{9} \cdot (-6) \cdot (-t) = \frac{8}{3}t$
$S_y\left(0\middle|\frac{8}{3}t\right)$
Welches t für nur eine Nullstelle:
Für $t = 6$ hat $f_t(x)$ nur eine Nullstelle (doppelt) bei $N_1(6|0)$. Diese Nulstelle ist gleichzeitig der Scheitel der Parabel.

c) t für Dreiecksfläche $A(t) = 4$:
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation.



Die Dreiecksfläche errechnet sich aus
$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$.
$c = \overline{N_2N_1} = 6 - t$
$h_c = t$
$A(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot (6-t) = 3t - \frac{1}{2}t^2$
$A(t) = 4$:
$3t - \frac{1}{2}t^2 = 4$ | $-4; \cdot 2$
$6t - t^2 - 8 = 0$ | $\cdot(-1)$
$t^2 - 6t + 8 = 0$
$t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8}$ | p/q-Formel
$t_1 = 4;\ t_2 = 2$
$A(2) = 4$ und $A(4) = 4$

d) Ursprungsgerade als Tangente an K_0:

$f_0(x) = \frac{4}{9}(x-6)\cdot x$

$t(x) = mx$ | Ursprungsgerade mit Steigung m

$f_0(x) \cap t(x)$

$\frac{4}{9}(x-6)\cdot x = mx$

$\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x - mx = 0$ | $\cdot\frac{4}{9}$

$x^2 - \frac{32}{27}x - \frac{4}{9}mx = 0$

$x^2 - x\left(\frac{32}{27} + \frac{4}{9}m\right) = 0$

$x_{1,2} = \frac{\frac{32}{27}+\frac{4}{9}m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{32}{27}+\frac{4}{9}m}{2}\right)^2}$

Bedingung für Tangente: Ausdruck unter der Wurzel muss null sein.

$\frac{\frac{32}{27}+\frac{4}{9}m}{2} = 0$

$\frac{32}{27} + \frac{4}{9}m = 0$

$\frac{4}{9}m = -\frac{32}{27}$ | $\cdot\frac{9}{4}$

$m = -\frac{8}{3}$

Die Ursprungsgerade $t(x) = -\frac{8}{3}x$ ist Tangente an K_0.

Lösung A4

a) $f_t(x) = t\cdot(x-1)^2$ und $g(x) = 1$

$f_t(x) \cap g(x)$

$t\cdot(x-1)^2 = 1$

$tx^2 - 2tx + t - 1 = 0$ | $:t$

$x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{t} = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 1 + \frac{1}{t}}$

$x_1 = 1 + \sqrt{\frac{1}{t}};\quad x_2 = 1 - \sqrt{\frac{1}{t}}$

Schnittpunkte: $S_1\left(1+\sqrt{\frac{1}{t}}\middle|1\right);\ S_2\left(1-\sqrt{\frac{1}{t}}\middle|1\right)$

b) $f_t(x) = x^2 + 4t - 2t^2$ und $g(x) = -x^2 + 4x$

$f_t(x) \cap g(x)$

$x^2 + 4t - 2t^2 = -x^2 + 4x$

$2x^2 - 4x + 4t - 2t^2 = 0$ | $:2$

$x^2 - 2x + 2t - t^2 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 2t + t^2}$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = 1 \pm (1-t)$

$x_1 = t;\quad x_2 = 2 - t$

$g(t) = -t^2 + 4t;\quad g(2-t) = -(2-t)^2 + 4(2-t) = -4 + 4t - t^2 + 8 - 4t = -t^2 + 4$

Schnittpunkte: $S_1(t|4t-t^2);\ S_2(2-t|4-t^2)$

Lösung A5

a) Achsenschnittpunkte von f mit $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2-2$:

Schnittpunkt mit der y-Achse $f(0)$:

$f(0)=\frac{1}{2}(0+1)^2-2=-\frac{3}{2}$

$S_y\left(0\middle|-\frac{3}{2}\right)$

Nullstellen mit $f(x)=0$

$\frac{1}{2}(x+1)^2-2=0$

$\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}=0 \quad | \quad \cdot 2$

$x^2+2x-3=0$

$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+3} \quad | \quad p/q$-Formel

$x_1=1;\quad x_2=-3$

$N_1(1|0);\quad N_2(-3|0).$

b) Achsenschnittpunkte von g_t mit $g_t(x)=-\frac{1}{2}(x-3)^2+t$:

Schnittpunkt mit der y-Achse $g_t(0)$:

$g_t(0)=-\frac{1}{2}(0-3)^2+t=-\frac{9}{2}+t$

$S_y\left(0\middle|-\frac{3}{2}\right)$

Nullstellen mit $g_t(x)=0$

$-\frac{1}{2}(x-3)^2+t=0$

$-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{9}{2}+t=0 \quad | \quad \cdot(-2)$

$x^2-6x+9-2t=0$

$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-9+2t} \quad | \quad p/q$-Formel

$x_1=3+\sqrt{2t};\quad x_2=3-\sqrt{2t}$

$N_1\left(3+\sqrt{2t}\middle|0\right);\quad N_2(3-\sqrt{2t}|0)$

c) Schnittpunkte von f und g_t:

$f(x)\cap g_t(x)$

$\frac{1}{2}(x+1)^2-2=-\frac{1}{2}(x-3)^2+t \quad | \quad \cdot 2$

$(x+1)^2-4=-(x-3)^2+2t$

$x^2+2x+1-4=-x^2+6x-9+2t$

$2x^2-4x+6-2t=0 \quad | \quad :2$

$x^2-2x+3-t=0$

$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-3+t}$

Zwei Schnittpunkte:

$-2+t>0$

$t>2$

ein Schnittpunkt:

$-2+t=0$

$t=2$

kein Schnittpunkt:

$-2+t<0$

$t<2$

Lösung A6

Berührpunkt von $f_t(x) = tx^2 + (t+1)x$ mit $g(x) = -1$:
$g(x) = -1$ ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand $y = -1$. f_t kann diese Gerade nur im Scheitel berühren. Aus diesem Zusammenhang heraus ergibt sich über:

$f_t(x) = tx^2 + (t+1)x$ | $:t$

$\frac{f_t(x)}{t} = x^2 + \frac{t+1}{t}x$

$\frac{f_t(x)}{t} = \left(x + \frac{t+1}{2t}\right)^2 - \left(\frac{t+1}{2t}\right)^2$ | Quadratische Ergänzung

$f_t(x) = t \cdot \left(x + \frac{t+1}{2t}\right)^2 - t \cdot \left(\frac{t+1}{2t}\right)^2$

$S_t\left(-\frac{t+1}{2t}\middle|-\frac{t\cdot(t+1)^2}{4t^2}\right)$

$S_t\left(-\frac{t+1}{2t}\middle|-\frac{(t+1)^2}{4t}\right)$

$-\frac{(t+1)^2}{4t} = -1$

$(t+1)^2 = 4t$

$t^2 + 2t + 1 - 4t = 0$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1}$

Für $t = 1$ berührt f_1 die Gerade g mit $g(x) = -1$.

Berührpunkt $S_1(-1|-1)$

Lösung A7

t für Berührung von f_t mit $f_t(x) = x^2 - tx + 72$ und p mit $p(x) = -x^2$:

$f_t(x) \cap p(x)$

$x^2 - tx + 72 = -x^2$ | $+x^2$

$2x^2 - tx + 72 = 0$ | $:2$

$x^2 - \frac{t}{2}x + 36 = 0$

$x_{1,2} = \frac{t}{4} \pm \sqrt{\frac{t^2}{16} - 36}$

Berühren bedeutet, dass der Ausdruck unter der Wurzel null sein muss.

$\frac{t^2}{16} - 36 = 0$

$t^2 = 16 \cdot 36$

$t_{1,2} = \pm 4 \cdot 6 = \pm 24$

f_4 bzw. f_{-4} berührt p.

Berührpunkte:

$x_1 = \frac{24}{4} = 6; \quad x_2 = -\frac{24}{4} = -6$

$p(6) = -36; \quad p(-6) = -36$

$B_1(6|-36); \quad B_2(-6|-36)$

Lösung A8

Lösungshilfe

Bestimme zunächst den Scheitel der Parabel in Abhängigkeit von t.
Stelle dann die erhaltene x-Koordinate nach t um. Setze dieses t in die y-Koordinate des Scheitels ein.
Die dadurch erhaltene Funktionsgleichung ist die Gleichung der gesuchten Ortskurve.

Level 3 – Expert – Blatt 5

a) $f_t(x) = 2x^2 - 2tx + \frac{t^2}{4} + 1$ | :2

$\frac{f_t(x)}{2} = x^2 - tx + \frac{t^2}{8} + \frac{1}{2}$

$\frac{f_t(x)}{2} = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{8} + \frac{1}{2}$ | ·2

$f_t(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4} + 1$

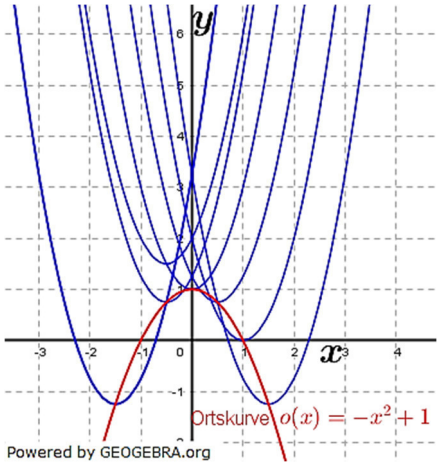
$f_t(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t^2}{4} + 1$

$S_t\left(\frac{t}{2} \middle| -\frac{t^2}{4} + 1\right)$

$x_{S_t} = \frac{t}{2} \Rightarrow t = 2x$

$t \to -\frac{t^2}{4} + 1$

$o(x) = -\frac{4x^2}{4} + 1 = -x^2 + 1$



b) $f_t(x) = 2x^2 - 2tx + \frac{t^2}{4} + t - 1$ | :2

$\frac{f_t(x)}{2} = x^2 - tx + \frac{t^2}{8} + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$

$\frac{f_t(x)}{2} = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{8} + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$

$\frac{f_t(x)}{2} = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{-t^2+4t-4}{8}$ | ·2

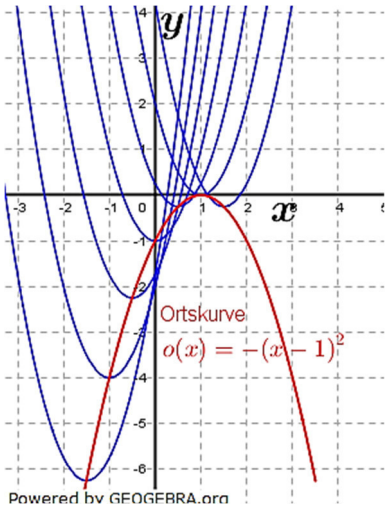
$f_t(x) = 2\left(x - \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t^2-4t+4}{4}$

$S_t\left(\frac{t}{2} \middle| -\frac{(t-2)^2}{4}\right)$

$x_{S_t} = \frac{t}{2} \Rightarrow t = 2x$

$t \to -\frac{(t-2)^2}{4}$

$o(x) = -\frac{(2x-2)^2}{4} = -(x-1)^2$



c) $-2x^2 + 2tx - \frac{t^2}{4} + t + 1$ | :(−2)

$-\frac{f_t(x)}{2} = x^2 - tx + \frac{t^2}{8} - \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$

$-\frac{f_t(x)}{2} = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{8} - \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$

$-\frac{f_t(x)}{2} = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{-t^2-4t-4}{8}$ | ·(−2)

$f_t(x) = -2\left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2+4t+4}{4}$

$S_t\left(\frac{t}{2} \middle| \frac{(t+2)^2}{4}\right)$

$x_{S_t} = \frac{t}{2} \Rightarrow t = 2x$

$t \to \frac{(t+2)^2}{4}$

$o(x) = -\frac{(2x+2)^2}{4} = (x+1)^2$

d) $f_t(x)=\frac{1}{2}x^2-2tx+4t-1$ | $\cdot 2$

$2f_t(x)=x^2-4tx+8t-2$

$2f_t(x)=(x-2t)^2-4t^2+8t-2$ | $:2$

$f_t(x)=\frac{1}{2}\cdot(x-2t)^2-2t^2+4t-1$

$f_t(x)=\frac{1}{2}\cdot(x-2t)^2-\frac{1}{2}(4t^2-8t)-1$

$f_t(x)=\frac{1}{2}\cdot(x-2t)^2-\frac{1}{2}(2t-2)^2+2-1$

$f_t(x)=\frac{1}{2}\cdot(x-2t)^2-\frac{1}{2}(2t-2)^2+2-1$

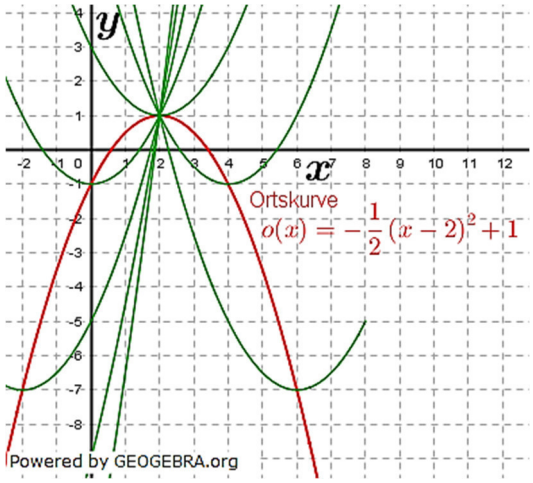
$f_t(x)=\frac{1}{2}\cdot(x-2t)^2-\frac{1}{2}(2t-2)^2+1$

$S_t\left(2t\middle|-\frac{1}{2}(2t-2)^2+1\right)$

$x_{S_t}=2t \Rightarrow t=\frac{x}{2}$

$t\rightarrow -\frac{1}{2}(2t-2)^2+1$

$o(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1$



Lösung A9

Lösungshilfe

Bestimme zunächst den Scheitel der Parabel in Abhängigkeit von t.
Stelle dann die erhaltene x-Koordinate nach t um. Setze dieses t in die y-Koordinate des Scheitels ein.
Die dadurch erhaltene Funktionsgleichung ist die Gleichung der gesuchten Ortskurve.

$f_t(x)=-\frac{t}{2}x^2+t^2x-\frac{t^3}{2}+\frac{t^2}{2}+2$ | $\cdot\left(-\frac{2}{t}\right)$

$-\frac{2}{t}\cdot f_t(x)=x^2-2tx+t^2-t-\frac{4}{t}$

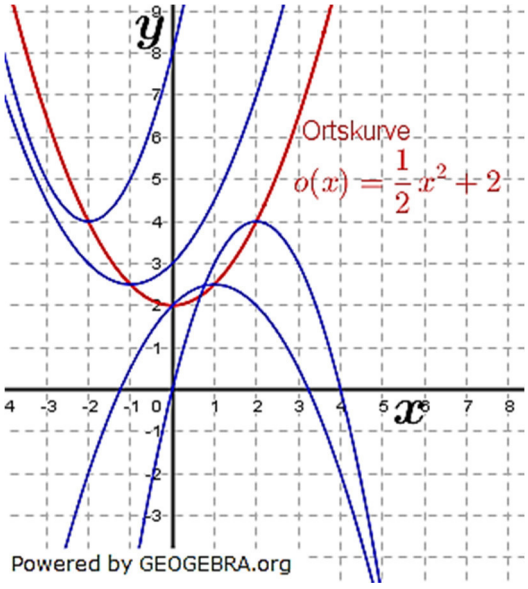
$-\frac{2}{t}\cdot f_t(x)=(x-t)^2-t^2+t^2-t-\frac{4}{t}$ | quadratische Ergänzung

$-\frac{2}{t}\cdot f_t(x)=(x-t)^2-t-\frac{4}{t}$ | $\cdot\left(-\frac{t}{2}\right)$

$f_t(x)=-\frac{t}{2}\cdot(x-t)^2+\frac{t^2}{2}+2$

$S_t\left(t\middle|\frac{t^2}{2}+2\right)$

$x_{S_t}=t \Rightarrow t=x$

$t\rightarrow\frac{t^2}{2}+2$

$o(x)=\frac{1}{2}x^2+2$