Aufgabe A1

Gib die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Graphen von f und g an.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ und $g(x) = 2x + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x$ und $g(x) = -x - 4$

c) $f(x) = x^2 + x - 2$ und $g(x) = 2x - 3$

d) $f(x) = 2x^2 - 4x + 8$ und $g(x) = 8x - 10$

Aufgabe A2

Beschreibe die gegenseitige Lage der Graphen von f und g. Gib gegebenenfalls die gemeinsamen Punkte an.

a) $f(x) = 5x^2 + 20x - 60$ und $g(x) = -5x + 10$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$ und $g(x) = 3x + 4$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ und $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$

d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$ und $g(x) = \frac{1}{4}x - 1$

Aufgabe A3

Zeige, dass die Gerade zur Funktion f eine Tangente an den Graphen der Funktion ist. Bestimme die Koordinaten des Berührpunktes und zeichne die Graphen.

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x - 2$, $g(x) = -x + 1$

b) $f(x) = -2x^2 + 2x$, $g(x) = -2x + 2$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$, $g(x) = x + \frac{5}{2}$

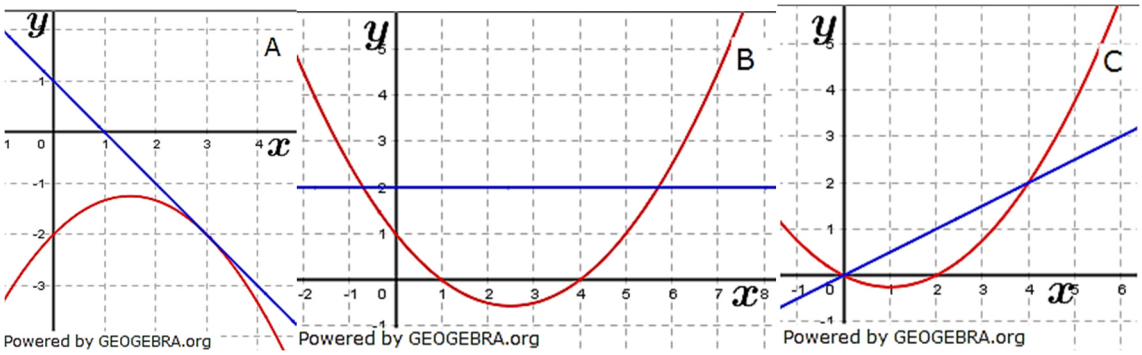
Aufgabe A4

Ordne den Funktionstermen deren zugehörigen Graphen zu. Lies die Schnittpunkte bzw. den Berührpunkt ab und überprüfe deinen Vorschlag durch Rechnung.

a) $2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + 1$

b) $-x + 1 = -\frac{1}{3}x^2 + x - 2$

c) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$



Aufgabe A5

Bestimme den Parameter der Geradengleichung so, dass die Gerade den Graphen von f berührt. Ermittle die Koordinaten des Berührpunktes.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, $g(x) = x + w$

b) $f(x) = 4x^2 + 3x + 2$, $g(x) = -3x + v$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, $g(x) = x + u$

Aufgabe A6

Der Graph der linearen Funktion g geht durch P und Q. Gib den Funktionsterm von an g und zeige, dass der Graph von g eine Tangente an den Graphen von f ist.

a) $P(2|70);\ Q(3|110)$
$f(x) = -5x^2 + 40x - 10$

b) $P(0|5);\ Q(5|0)$
$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x + 2$

c) $P(-2|14);\ Q(-1|6)$
$f(x) = 2x^2 - 8x - 2$

d) $P(1|-5);\ Q(3|3)$
$f(x) = x^2 - 5$

Aufgabe A7

Bestimme die Funktion f, deren Graph die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) K ist achsensymmetrisch und geht durch $P(-1|-2)$ und $Q(2|7)$.
b) K ist eine verschobene Normalparabel, die durch $P(2|-1)$ und $Q(-1|5)$.
c) K geht durch den Ursprung, schneidet die x-Achse bei $N(2|0)$ und verläuft durch $P(-1|-1{,}5)$.
d) K ist eine an der x-Achse gespiegelte, verschobene Normalparabel, die durch $P(1|6)$ und $Q(4|3)$ verläuft.
e) K verläuft durch die Punkte $P(0|2), Q(-1|-3)$ und $R(1|1)$.

Aufgabe A8

Der Graph einer quadratischen Funktion f geht durch den Punkt Q und schneidet die x-Achse in N_1 und N_2. Bestimme den Funktionsterm von f und gib diesen in der Hauptform an.

a) $Q(3|-2)$; $N_1(-1|0)$ und $N_2(2|0)$
b) $Q(2|-5)$; $N_1(-0{,}5|0)$ und $N_2(1|0)$
c) $Q(-1|4)$; $N_1(-2|0)$ und $N_2(3|0)$
d) $Q(3|6)$; $N_1(-1|0)$ und $N_2(-3|0)$

Aufgabe A9

Der Graph einer quadratischen Funktion f hat den Scheitel S und geht durch den Punkt P. Bestimme ihren Funktionsterm.

a) $S(2|1)$ und $P(4|3)$
b) $S(-1|-1)$ und $P(-3|-2)$
c) $S(-0{,}5|1{,}5)$ und $P(0{,}5|0{,}5)$

Aufgabe A10

Der Graph einer quadratischen Funktion f geht durch die folgenden Punkte. Bestimme mit einem passenden Ansatz einen Funktionsterm.

a) Scheitel $S(-6|3)$ und Punkt $P\left(-4\middle|\frac{5}{3}\right)$
b) Achsenschnittpunkte $N_1(-2|0)$, $N_2(6|0)$ und $R(0|-1{,}2)$

Aufgabe A11

Eine quadratische Funktion f hat bei $x_1 = -3$ und $x_2 = -1$ Nullstellen. Der größte Funktionswert beträgt 1. Bestimme den Funktionsterm.

Aufgabe A12

Der Graph einer quadratischen Funktion f ist symmetrisch zur y-Achse und geht durch die Punkte $P(0|5)$ und $Q(1|3)$. Bestimme den Funktionsterm.

Aufgabe A13

a) Stelle fest, welche der folgenden Punkte auf der um 2 Einheiten nach rechts und im $1{,}4$ Einheiten nach unten verschobenen Parabel liegen.
(I) $P_1(1|19{,}6)$ (II) $P_2(4|2{,}6)$ (III) $P_3(-2|4{,}6)$
(IV) $P_4(-3|23{,}6)$ (V) $P_5(-1|7{,}6)$

b) An welchen Stellen nimmt die Funktion (1) $7{,}6$ den Wert; (2) den Wert $2{,}6$ an?

Aufgabe A14

Zeichne die Normalparabel mit den angegebenen Eigenschaften. Notiere den Term der dazugehörigen Funktion.

a) $S(-2|-1)$ ist der Scheitelpunkt.
b) An den Stellen -2 und 4 wird die x-Achse von der Parabel geschnitten.
c) Die Parabel geht durch den Ursprung und hat die Gerade $x = 2$ als Symmetrieachse.
d) Der Scheitelpunkt hat -3 als y-Koordinate. Der Ursprung ist Punkt der Parabel.
e) Die Parabel geht durch die Punkte $P_1(-1|7)$ und $P_2(3|7)$.

Lösung A1

Lösungshilfe:
Gemeinsame Punkte sind Schnittpunkte bzw. Berührpunkte. Solche Punkte bestimmt man durch Gleichsetzung.
Da in dieser Aufgabe nur die Anzahl gemeinsamer Punkte gefragt ist, genügt es, den Wert der Diskriminante der sich ergebenden quadratischen Gleichung zu bestimmen.

Detaillierte Lösung für

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ und $g(x) = 2x + 2$

$f(x) \cap g(x)$

$\frac{1}{2}x^2 + 2x = 2x + 2 \quad | \quad -2x;$

$\frac{1}{2}x^2 = 2 \quad | \quad \cdot 2$

$x^2 = 4; \; x_{1,2} = \pm 2$

f und g haben zwei gemeinsame Punkte.

b) $\frac{1}{4}x^2 - 3x = -x - 4 \quad | \quad +x; \; +4$

$\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 0 \quad | \quad \cdot 4$

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 16}$

$D = 0 \; => \; f$ und g haben einen gemeinsamen Punkt.

c) $x^2 + x - 2 = 2x - 3 \quad | \quad -2x; \; +3$

$x^2 - x + 1 = 0 \quad | \quad :2$

$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1}$

$D < 0 \; => \; f$ und g haben keine gemeinsamen Punkte.

d) $2x^2 - 4x + 8 = 8x - 10 \quad | \quad +8x; \; -10$

$2x^2 + 4x - 2 = 0 \quad | \quad :2$

$x^2 + 2x - 1 = 0$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 1}$

$D > 0 \; => \; f$ und g haben zwei gemeinsamen Punkte.

Lösung A2

Lösungshilfe:
Gegenseitige Lage können sein:
Passante: f und g haben keine gemeinsamen Punkte
Tangente: f und g haben einen gemeinsamen Punkt, sie berühren sich.
Sekante: f und g haben zwei gemeinsame Punkte, sie schneiden sich.
Gemeinsame Punkte sind Schnittpunkte bzw. Berührpunkte. Solche Punkte bestimmt man durch Gleichsetzung.

Detaillierte Lösung für

a) $f(x) = 5x^2 + 20x - 60$ und $g(x) = -5x + 10$

$f(x) \cap g(x)$

$5x^2 + 20x - 60 = -5x + 10 \quad | \quad +5x; \; -10$

$5x^2 + 25x - 70 = 0 \quad | \quad :5$

$x^2 + 5x - 14 = 0$

$x_{1,2} = -2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 + 14} = -2{,}5 \pm 5{,}5$

$D > 0$ => f und g haben zwei gemeinsame Punkte, g ist Sekante zu f.
$x_1 = 3;\quad x_2 = -8$
$g(3) = -5 \cdot 3 + 10 = -5$
$g(-8) = -5 \cdot (-8) + 10 = 50$
Schnittpunkte sind $S_1(3|-5)$ und $S_2(-8|50)$.

b) $-\frac{1}{3}x^2 + 2x = 3x + 4 \quad | \quad -3x;\ -4$
$-\frac{1}{3}x^2 - x - 4 = 0 \quad | \quad \cdot(-3)$
$x^2 + 3x + 12 = 0$
$x_{1,2} = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 12}$
$D < 0$ => f und g haben keine gemeinsame Punkte, g ist Passante zu f.

c) $\frac{1}{2}x^2 - 2 = x - 2 \quad | \quad -x;\ +2$
$\frac{1}{2}x^2 - x = 0 \quad | \quad \cdot 2$
$x^2 - 2x = 0$
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1}$
$D > 0$ => f und g haben zwei gemeinsame Punkte, g ist Sekante zu f.
$x_1 = 2;\quad x_2 = 0$
$g(2) = 2 - 2 = 0$
$g(0) = 0 - 2 = -2$
Schnittpunkte sind $S_1(2|0)$ und $S_2(0|-2)$.

d) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x - 1 \quad | \quad -\frac{1}{4}x;\ +1$
$-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} = 0 \quad | \quad \cdot(-4)$
$x^2 + x - 6 = 0$
$x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6} = -0{,}5 \pm 2{,}5$
$D > 0$ => f und g haben zwei gemeinsame Punkte, g ist Sekante zu f.
$x_1 = 2;\quad x_2 = -3$
$g(2) = \frac{1}{4} \cdot 2 - 1 = -\frac{1}{2}$
$g(-3) = \frac{1}{4} \cdot (-3) - 1 = -\frac{7}{4}$
Schnittpunkte sind $S_1\left(2\middle|-\frac{1}{2}\right)$ und $S_2\left(-3\middle|-\frac{7}{4}\right)$.

Lösung A3

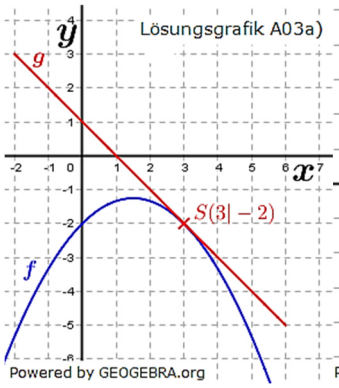
Lösungshilfe:
Hierzu müssen wir die Funktion f mit der Geraden gleichsetzen und nach x auflösen. Ist die Gerade eine Tangente an f, dann hat die entstehende quadratische Gleichung nur eine Lösung. Abschließend musst du noch die zugehörige y-Koordinate berechnen und dann die Graphen zeichnen.

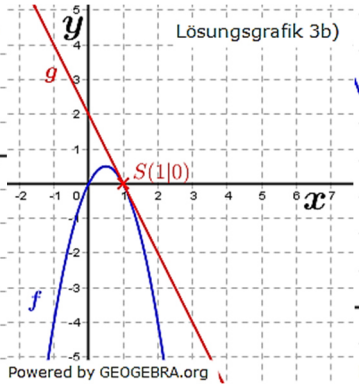
Detaillierte Lösung für

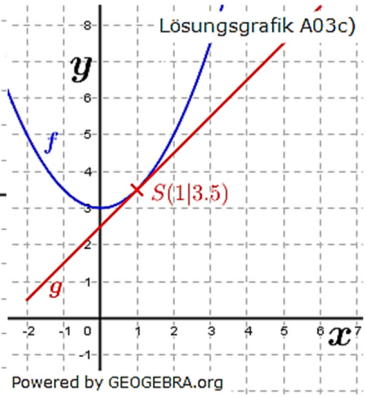
a) $f \cap g$
$-\frac{1}{3}x^2 + x - 2 = -x + 1 \quad | \quad +x - 1$
$-\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3 = 0 \quad | \quad \cdot(-3)$
$x^2 - 6x + 9 = 0$
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3$
$g(3) = -3 + 1 = -2$
$S(3|-2)$ ist Berührpunkt.

b) $-2x^2 + 2x = -2x + 2 \quad | \quad +2x - 2$
$-2x^2 + 4x - 2 = 0 \quad | \quad :(-2)$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$
$g(1) = -2 \cdot 1 + 2 = 0$
$S(1|0)$ ist Berührpunkt.

c) $\frac{1}{2}x^2 + 3 = x + \frac{5}{2} \quad | \quad -x - \frac{5}{2}$
$\frac{1}{2}x^2 - x + 0{,}5 = 0 \quad | \quad \cdot 2$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$
$g(1) = 1 + \frac{5}{2} = 3{,}5$
$S(1|3{,}5)$ ist Berührpunkt.







Lösung A4

Lösungshilfe:

Die Darstellung $\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ bedeutet, dass eine Gerade g mit $g(x) = \frac{1}{2}x$ mit der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ geschnitten wird und daraus die Schnittpunkte der Graphen der beiden Funktionen ermittelt werden können.
Entsprechend dieser Darstellung können die Grafiken den Gleichungen zugeordnet werden.

a) $2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + 1$
Die Gerade g mit $g(x) = 2$ wird mit der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + 1$ geschnitten.
Der Funktionsterm gehört zur Grafik B.
Schnittpunkt $S(5{,}7|2)$:
$\frac{1}{4} \cdot 5{,}7^2 - \frac{5}{4} \cdot 5{,}7 + 1 = 2$
$2 = 2$

b) $-x + 1 = -\frac{1}{3}x^2 + x - 2$
Die Gerade g mit $g(x) = -x + 1$ wird mit der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x - 2$ geschnitten.
Der Funktionsterm gehört zur Grafik A.
Berührpunkt $B(3|-2)$:

$-3+1=-\frac{1}{3}\cdot 3^2+3-2$
$-2=-2$

c) $\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$
Die Gerade g mit $g(x)=\frac{1}{2}x$ wird mit der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$ geschnitten.
Der Funktionsterm gehört zur Grafik C.
Schnittpunkt $O(0|0)$:
$\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{4}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot 0$
$0=0$

Lösung A5

Lösungshilfe:
Wir müssen die Funktionsgleichungen der Geraden g mit der Funktionsgleichung der Parabel f gleichsetzen und den Funktionsterm nach x auflösen (Mitternachtsformel). In der Diskriminanten der Lösung befindet sich dann der Parameter, der so gesetzt werden muss, dass die Diskriminante den Wert 0 enthält.

a) $f\cap g$
$\frac{1}{4}x^2=x+w \quad | \quad -x-w$
$\frac{1}{4}x^2-x-w=0 \quad | \quad \cdot 4$
$x^2-4x-4w=0$
$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4+4w}$
$4+4w=0 \;\; => \;\; w=-1$
$f(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^2=1$
Für $w=-1$ berühren sich f und g in $B(2|1)$.

b) $f\cap g$
$4x^2+3x+2=-3x+v \quad | \quad +3x-v$
$4x^2+6x+2-v=0 \quad | \quad :4$
$x^2+\frac{3}{2}x+\frac{2-v}{4}=0$
$x_{1,2}=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{2-v}{4}}$
$\frac{9}{16}-\frac{2-v}{4}=0$
$9=8-4v$
$4v=-1 \;\; => \;\; v=-\frac{1}{4}$
$f\left(-\frac{3}{4}\right)=4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+2=2$
Für $v=-\frac{1}{4}$ berühren sich f und g in $B(-\frac{3}{4}|2)$.

c) $f \cap g$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = x + u \quad | \quad -x - u$

$\frac{1}{2}x^2 - x - u + \frac{1}{2} = 0 \quad | \quad \cdot 2$

$x^2 - 2x - 2u + 1 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 2u - 1}$

$2u = 0 \;\; => \;\; u = 0$

$f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} = 1$

Für $u = 0$ berühren sich f und g in $B(1|1)$.

Lösung A6

Lösungshilfe:

Wir müssen die Funktionsgleichungen der Geraden g durch zwei Punkte aufstellen, indem wir zuerst die Steigung über $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ermitteln und dann mit einer Punktprobe das absolute Glied der Geradengleichung ermitteln.
Danach müssen wir die Geradengleichung mit der Funktionsgleichung der Parabel schneiden und nachweisen, dass es nur einen Schnittpunkt gibt, der ja dann ein Berührpunkt sein muss.

a) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{110 - 70}{3 - 2} = 40$

$g(x) = 40x + c$

$70 = 40 \cdot 2 + c \quad |$ Punktprobe mit $P(2|70)$

$c = -10$

$g(x) = 40x - 10; \quad f(x) = -5x^2 + 40x - 10$

$f \cap g$

$-5x^2 + 40x - 10 = 40x - 10 \quad | \quad -40x + 10$

$-5x^2 = 0$

$x_1 = 0$

$g(0) = 0$

f und g berühren sich im Ursprung.

b) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 0}{0 - 5} = -1$

$g(x) = -x + c$

$0 = -5 + c \quad |$ Punktprobe mit $P(5|0)$

$c = 5$

$g(x) = -x + 5; \quad f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x + 2$

$f \cap g$

$-\frac{1}{3}x^2 + x + 2 = -x + 5 \quad | \quad +x - 5$

$-\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3 = 0 \quad | \quad \cdot (-3)$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3$

$g(3) = -3 + 5 = 2$

f und g berühren sich in $B(3|2)$.

c) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{14-6}{-2-(-1)} = -8$

$g(x) = -8x + c$

$14 = -8 \cdot (-2) + c$ | Punktprobe mit $P(-2|14)$

$c = -2$

$g(x) = -8x - 2; \quad f(x) = 2x^2 - 8x - 2$

$f \cap g$

$2x^2 - 8x - 2 = -8x - 2$ | $+8x + 2$

$2x^2 = 0$ | $\cdot(-3)$

$x_1 = 0$

$g(0) = -2$

f und g berühren sich in $B(0|-2)$.

d) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-5)}{3-1} = 4$

$g(x) = 4x + c$

$3 = 4 \cdot 3 + c$ | Punktprobe mit $P(3|3)$

$c = -9$

$g(x) = -4x - 9; \quad f(x) = x^2 - 5$

$f \cap g$

$x^2 - 5 = -4x - 9$ | $+4x + 9$

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$

$g(2) = 4 \cdot 2 - 9 = -1$

f und g berühren sich in $B(2|-1)$.

Lösung A7

a) Achsensymmetrisch bedeutet, dass der Graph der Funktion in x-Richtung unverschoben ist, also gilt $f(x) = ax^2 + c$.

(1) $a \cdot (-1)^2 + c = -2$ | Punktprobe mit $P(-1|-2)$

(2) $a \cdot 2^2 + c = 7$ | Punktprobe mit $P(2|7)$

(1) $a + c = -2$

(2) $4a + c = 7$

(1)-(2) $-3a = -9$ | $:(-3)$

$a = 3$

$a \rightarrow (1)$

(1) $3 + c = -2$

$c = -5$

$f(x) = 3x^2 - 5$

b) Die Funktionsgleichung einer verschobenen Normalparabel lautet $f(x) = x^2 + bx + c$.

(1) $2^2 + 2b + c = -1$ | Punktprobe mit $P(2|-1)$

(2) $(-1)^2 - b + c = 5$ | Punktprobe mit $P(-1|5)$

(1) $4 + 2b + c = -1$

(2) $1 - b + c = 5$

(1)-(2) $3 + 3b = -6$ | -3

$3b = -9$ | $:3$

$b = -3$

$b \rightarrow (1)$

(1) $4 - 2 \cdot 3 + c = -1$

$c = 1$

$f(x) = x^2 - 3x + 1$

c) Zwei Nullstellen $O(0|0)$ und $N(2|0)$ sind gegeben. Wir stellen die Produktformel mit $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ auf und machen eine Punktprobe mit $P(-1|-1{,}5)$ zur Errechnung von a.

$f(x) = a \cdot (x - 0) \cdot (x - 2)$.

$a \cdot (-1) \cdot (-1 - 2) = -1{,}5$ | Punktprobe mit $P(-1|-1{,}5)$

$3a = -1{,}5$ | $:3$

$a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}x \cdot (x - 2) = -\frac{1}{2}x^2 + x$

d) Die Funktionsgleichung einer an der x-Achse gespiegelten, verschobenen Normalparabel lautet:

$f(x) = -x^2 + bx + c$.

(1) $-1^2 + b + c = 6$ | Punktprobe mit $P(1|6)$

(2) $-4^2 + 4b + c = 3$ | Punktprobe mit $P(4|3)$

(1) $b + c = 7$

(2) $4b + c = 19$

(1)-(2) $-3b = -12$ | $:(-3)$

$b = 4$

$b \rightarrow (1)$

(1) $4 + c = 7$

$c = 3$

$f(x) = -x^2 + 4x + 3$

e) Allgemeine Parabel durch drei Punkte mit $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(1) $c = 2$ | Punktprobe mit $P(0|2)$

(2) $a - b + c = -3$ | Punktprobe mit $P(-1|-3)$

(3) $a + b + c = 1$ | Punktprobe mit $P(1|1)$

$c \rightarrow (1); (3)$

(2) $a - b = -5$

(3) $a + b = -1$

(2)+(3) $2a = -6$ | $:2$

$a = -3$

$a \rightarrow (2)$

(2) $-3 - b = -5$

$b = 2$

$f(x) = -3x^2 + 2x + 2$

Lösung A8

Lösungshilfe:

Gegeben sind zwei Nullstellen und ein weiterer Punkt. Wir stellen die Faktorengleichung (Nullstellengleichung) $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ der Parabel auf und machen mit dem gegebenen Punkt eine Punktprobe zur Ermittlung von a.

a) $x_1 = -1;\ x_2 = 2$ und $Q(3|-2)$

$f(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$

$-2 = a \cdot (3 + 1) \cdot (3 - 2) = 4a$ | Punktprobe mit $Q(3|-2)$

$a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1) \cdot (x - 2)$

b) $x_1 = -0{,}5;\ x_2 = 1$ und $Q(2|-5)$
$f(x) = a \cdot (x + 0{,}5) \cdot (x - 1)$
$-5 = a \cdot (2 + 0{,}5) \cdot (2 - 1) = 2{,}5a$ | Punktprobe mit $Q(2|-5)$
$a = -2$
$f(x) = -2(x + 0{,}5) \cdot (x - 1)$

c) $x_1 = -2;\ x_2 = 3$ und $P(-1|4)$
$f(x) = a \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$
$4 = a \cdot (-1 + 2) \cdot (-1 - 3) = -4a$ | Punktprobe mit $Q(-1|4)$
$a = -1$
$f(x) = -(x + 2) \cdot (x - 3)$

d) $x_1 = -1;\ x_2 = -3$ und $P(3|6)$
$f(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x + 3)$
$6 = a \cdot (3 + 1) \cdot (3 + 3) = 24a$ | Punktprobe mit $Q(3|6)$
$a = \frac{1}{4}$
$f(x) = \frac{1}{4}(x + 1) \cdot (x + 3)$

Lösung A9

Lösungshilfe:
Gegeben ist der Scheitel und ein weiterer Punkt. Wir stellen die Scheitelform $f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ der Parabel auf und machen mit dem gegebenen Punkt eine Punktprobe zur Ermittlung von a.

a) $S(2|1)$ und $P(4|3)$
$f(x) = a \cdot (x - 2)^2 + 1$
$3 = a \cdot (4 - 2)^2 + 1$ | Punktprobe mit $Q(4|3)$
$4a = 2$
$a = \frac{1}{2}$
$f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$

b) $S(-1|-1)$ und $P(-3|-2)$
$f(x) = a \cdot (x + 1)^2 - 1$
$-2 = a \cdot (-3 + 1)^2 - 1$ | Punktprobe mit $Q(-3|-2)$
$4a = -1$
$a = -\frac{1}{4}$
$f(x) = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 - 1$

c) $S(-0{,}5|1{,}5)$ und $P(0{,}5|0{,}5)$
$f(x) = a \cdot (x + 0{,}5)^2 + 1{,}5$
$0{,}5 = a \cdot (0{,}5 + 0{,}5)^2 + 1{,}5$ | Punktprobe mit $Q(0{,}5|0{,}5)$
$a = -1$
$f(x) = -(x + 0{,}5)^2 + 1{,}5$

Lösung A10

a) $S(-6|3)$ und $P\left(-4\middle|\frac{5}{3}\right)$

$f(x) = a \cdot (x+6)^2 + 3$

$\frac{5}{3} = a \cdot (-4+6)^2 + 3 = 4a + 3$ | Punktprobe mit $Q\left(-4\middle|\frac{5}{3}\right)$

$a = -\frac{1}{3}$

$f(x) = -\frac{1}{3}(x+6)^2 + 3$

b) $N_1(-2|0)$; $N_2(6|0)$ und $P(0|-1{,}2)$

$f(x) = a \cdot (x+2) \cdot (x-6)$

$-1{,}2 = a \cdot 2 \cdot (-6) = -12a$ | Punktprobe mit $Q(0|-1{,}2)$

$a = 0{,}1$

$f(x) = 0{,}1(x+2)(x-6)$

Lösung A11

Lösungshilfe:

Gegeben sind zwei Nullstellen und ein maximaler Funktionswert (y-Wert) 1. Wir müssen hierzu zunächst noch den x-Wert des maximalen Funktionswertes bestimmen. Aus Symmetriegründen liegt dieser x-Wert in der Mitte der beiden Nullstellen. Damit ist der Scheitel bekannt.

$f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$

$f(x) = a \cdot (x+1)(x+3)$

$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1-3}{2} = -2$

Scheitelpunkt $S(-2|1)$

$1 = a \cdot (-2+1)(1+3) - 4a$ | Punktprobe mit $S(-2|1)$

$a = -\frac{1}{4}$

$f(x) = -\frac{1}{4}(x+1)(x+3)$

Lösung A12

Lösungshilfe:

Eine achsensymmetrische Parabel ist in x-Richtung unverschoben, hat somit die Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + c$. Wir machen mit den gegebenen Punkten eine Punktprobe und lösen das Gleichungssystem nach a und c auf.

$f(x) = ax^2 + c$

(1) $5 = 0 + c$ | Punktprobe mit $P(0|5)$

(2) $3 = a + c$ | Punktprobe mit $Q(1|3)$

$c \rightarrow (2)$

(2) $3 = a + 5$

$a = -2$

$f(x) = -2x^2 + 5$

Lösung A13

a) Wir stellen zunächst die Scheitelpunktgleichung auf.
$p(x) = (x-2)^2 - 1{,}4$
Pro Punkt machen wir jetzt eine Punktprobe:

(I) $P_1(1|19{,}6)$
$19{,}6 \stackrel{?}{=} (1-2)^2 - 1{,}4$
$19{,}6 \neq 1 - 1{,}4 = -0{,}4$ ➔ Der Punkt liegt nicht auf der Parabel.

(II) $P_2(4|2{,}6)$
$2{,}6 \stackrel{?}{=} (4-2)^2 - 1{,}4$
$2{,}6 = 4 - 1{,}4 = 2{,}6$ ➔ Der Punkt liegt auf der Parabel.

(III) $P_3(-2|4{,}6)$
$4{,}6 \stackrel{?}{=} (-2-2)^2 - 1{,}4$
$2{,}6 \neq 16 - 1{,}4 = 14{,}6$ ➔ Der Punkt liegt nicht auf der Parabel.

(VI) $P_4(-3|23{,}6)$
$23{,}6 \stackrel{?}{=} (-3-2)^2 - 1{,}4$
$23{,}6 = 25 - 1{,}4 = 23{,}6$ ➔ Der Punkt liegt auf der Parabel.

(V) $P_5(-1|7{,}6)$
$7{,}6 \stackrel{?}{=} (-1-2)^2 - 1{,}4$
$7{,}6 = 9 - 1{,}4 = 7{,}6$ ➔ Der Punkt liegt auf der Parabel.

b) (1) x-Werte für $y = 7{,}6$:

$7{,}6 = (x-2)^2 - 1{,}4 \quad | \quad +(1{,}4)$
$9 = (x-2)^2 \quad | \quad \sqrt{}$
$x - 2 = \pm 3 \quad | \quad +2$
$x_{1,2} = \pm 3 + 2$
$x_1 = 5; \quad x_2 = -1$

(2) x-Werte für $y = 2{,}6$:

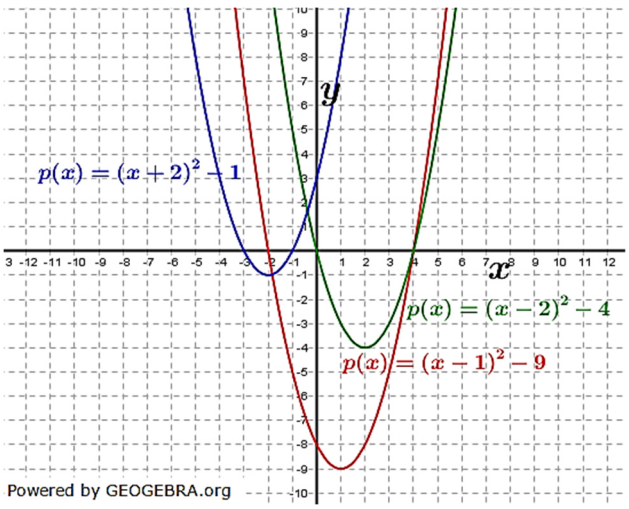
$2{,}6 = (x-2)^2 - 1{,}4 \quad | \quad +(1{,}4)$
$4 = (x-2)^2 \quad | \quad \sqrt{}$
$x - 2 = \pm 2 \quad | \quad +2$
$x_{1,2} = \pm 2 + 2$
$x_1 = 4; \quad x_2 = 0$

Lösung A14

a) $S(-2|-1)$ ist der Scheitelpunkt.
$p(x) = (x+2)^2 - 1$

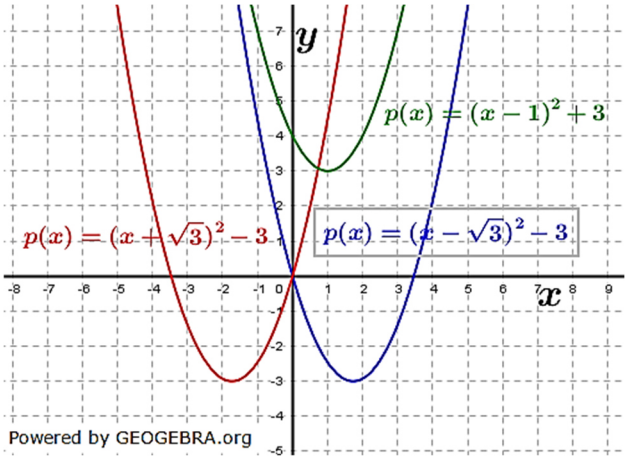
b) An den Stellen -2 und 4 wird die x-Achse von der Parabel geschnitten.
$p(x) = (x-1)^2 - 9$

c) Die Parabel geht durch den Ursprung und hat die Gerade $x = 2$ als Symmetrieachse.
$p(x) = (x-2)^2 - 4$



d) Der Scheitelpunkt hat -3 als y-Koordinate. Der Ursprung ist Punkt der Parabel.

$p(x) = (x-b)^2 - 3$
Punktprobe mit $O(0|0)$
$0 = (-b)^2 - 3$
$0 = b^2 - 3$
$b^2 = 3$
$b_{1,2} = \pm\sqrt{3}$
Es gibt also zwei Lösungen
$p_1(x) = \left(x - \sqrt{3}\right)^2 - 3$
$p_2(x) = \left(x + \sqrt{3}\right)^2 - 3$



e) Die Parabel geht durch die Punkte $P_1(-1|7)$ und $P_2(3|7)$.
$p(x) = (x-1)^2 + 3$