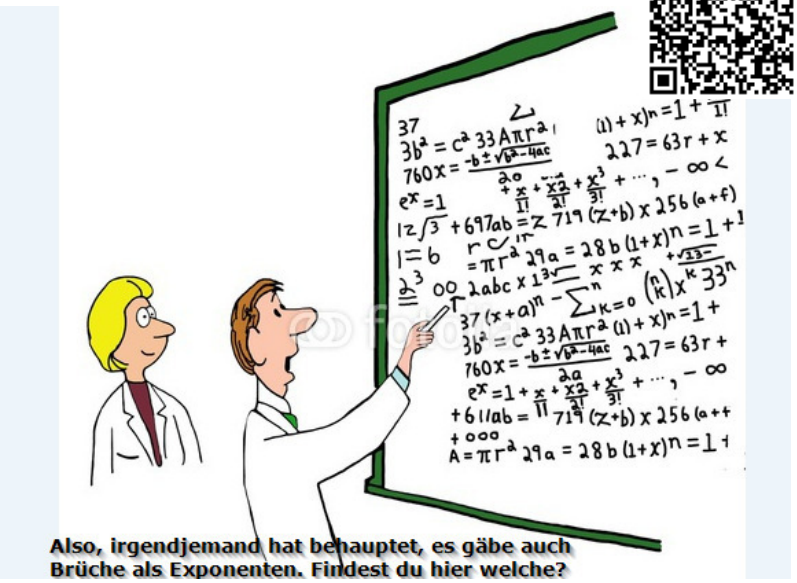
Zwei Schüler unterhalten sich:

„Max, stimmt es eigentlich, dass Exponenten auch als Brüche existieren?".
„Ja, das soll es geben", antwortet Peter, „ich weiß nur nicht, wie das gehen soll, dass man eine Zahl z. B. ein halb mal mit sich selbst multipliziert."



Alles Mögliche haben wir nun schon mit Potenzen angestellt. Wir haben sie addiert, subtrahiert, multipliziert, dividiert und potenziert. Aber bei allen Operationen hatten wir immer eine ganze Zahl als Exponenten, sowohl ganze positiver als auch negative Zahlen, ja, es war sogar die Null dabei.

In diesem Kapitel haben wir es nun mit Aufgaben zu tun, in denen die Hochzahl auch eine rationale Zahl sein kann. Wir erinnern uns an ein paar Schuljahre zurück, wo wir uns mit der Bruchrechnung beschäftigten. Dort haben wir gelernt, dass man jeden beliebigen Bruch bzw. Dezimalzahlen mit endlichen bzw. periodisch wiederkehrenden Nachkommastellen der Menge der

rationalen Zahlen

zuordnet. Wir haben sogar das mathematische Zeichen hierfür kennengelernt. Die Gesamtmenge der rationalen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{Q}$.
Eine rationale Zahl ist nichts anderes als ein Bruch, bei dem der Zähler als auch der Nenner wiederum aus einer ganzen Zahl besteht. Somit ist

$$q = \frac{m}{n} \quad \text{mit } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

eine rationale Zahl.

Beispiele 1

$q = \frac{1}{2}$ ist eine rationale Zahl bestehend aus den natürlichen Zahlen 1 und 2 im Zähler bzw. Nenner. Da du $\frac{1}{2} = 0{,}5$ schreiben kannst, ist die Zahl $0{,}5$ auch eine rationale Zahl.

$p = \frac{2}{3}$ ist eine rationale Zahl bestehend aus den natürlichen Zahlen 2 und 3 im Zähler bzw. Nenner. Da du $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$ schreiben kannst, ist die Zahl $0{,}\overline{6}$ auch eine rationale Zahl. Hier ist die Anzahl der Nachkommastellen zwar nicht endlich, jedoch periodisch wiederkehrend.

ABER:

$z = \sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl, denn $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots\ldots$, die Anzahl der Nachkommastellen ist weder endlich noch periodisch wiederkehrend.

Potenzen mit rationalem Exponenten haben die Form

$$a^{\frac{m}{n}} \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

Beispiele 2

$q^{\frac{1}{2}}$ ist eine Potenz mit rationalem Exponenten. Da du $\frac{1}{2} = 0{,}5$ schreiben kannst, ist die Zahl $q^{0{,}5}$ auch eine Potenz mit rationalem Exponenten.

$p^{\frac{2}{3}}$ ist eine Potenz mit rationalem Exponenten. Da du $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$ schreiben kannst, ist die Zahl $p^{0{,}\overline{6}}$ auch eine Potenz mit rationalem Exponenten.

ABER:

$z^{\sqrt{2}}$ ist keine Potenz mit rationalem Exponenten, da $\sqrt{2}$, nicht zu den rationalen Zahlen gehört.

Potenzen mit rationalem Exponenten werden als eine andere Schreibweise für Wurzeln verwendet. Genaueres hierüber findest du im Kapitel „Potenzdarstellung von Wurzeln". In diesem Kapitel geben wir dir deshalb lediglich eine Kurzfassung dieser Darstellung. Es gilt:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \text{mit } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N};\ a \in \mathbb{R}^+$$

mit m als ganzer Zahl, n als natürlicher Zahl und a als jede beliebige reelle Zahl ≥ 0.

Wie du aus der allgemeinen Schreibweise erkennst, wird der Zähler m des rationalen Exponenten zum ganzzahligen Exponenten der Basis a.
Der Nenner n des rationalen Exponenten wird zum Exponenten der Wurzel.

Beispiele 3

$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ $\quad 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^2$ $\quad 8^{\frac{11}{15}} = \sqrt[15]{8^{11}} = \left(\sqrt[15]{8}\right)^{11}$

$a^{\frac{4}{9}} = \sqrt[9]{a^4} = \left(\sqrt[9]{a}\right)^4$ $\quad -b^{\frac{2}{5}} = -\sqrt[5]{b^2} = -\left(\sqrt[5]{b}\right)^2$ $\quad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$

Rechenregeln für Potenzen mit rationalem Exponenten

Die Rechenregeln für Potenzen mit rationalem Exponenten sind dieselben wie die für das Rechnen von Potenzen mit gleicher Basis und Potenzen mit gleichem Exponenten, also dem 1. Potenzgesetz, dem 2. Potenzgesetz, dem 3. Potenzgesetz und dem 4. Potenzgesetz, so wie wir sie in den entsprechenden Kapiteln bereits kennengelernt haben.

Beispiele 4

$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$ $\quad 5^{\frac{1}{3}} : 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} = 5^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{3}}}$

$a^{\frac{4}{9}} \cdot b^{\frac{4}{9}} = (a \cdot b)^{\frac{4}{9}}$ $\quad c^{\frac{2}{5}} : b^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{2}{5}}$

$2^{\frac{1}{2}^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{4}}$ $\quad e^{\frac{2^{\frac{3}{4}}}{5}} = e^{\frac{6}{20}} = e^{\frac{3}{10}}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de