Aufgabe A1

Herr Maier kaufte 1950 ein Auto für $2\,700\ DM$. Da er nicht viel fuhr und das Auto auch sonst hegte und pflegte, konnte er es im Jahre 2010 als Oldtimer Wagen an einen Liebhaber zu $50\,000$ € verkaufen. Mit welchem Zins hat sich der Wertzuwachs entwickelt?
Verwende den Umrechnungsfaktor $1{,}95583$ für die Umrechnung von DM nach €.

Aufgabe A2

Ein Auto kostet $70\,450$ € . Es verliert jedes Jahr 20 % seines aktuellen Wertes (degressive Abschreibung). Welchen Wert besitzt das Auto nach 5 Jahen?

Aufgabe A3

Eine Person legt $3\,430$ € zu $6{,}5$ % Zinsen an, Zinsen werden mitverzinst.

a) Welches Guthaben besitzt er nach fünf Jahren, wenn sie zu Beginn des dritten Jahres eine Sonderzahlung von $1\,200$ € leistet?
b) Welche Sonderzahlung hätte sie nach zwei Jahren leisten müssen, um nach fünf Jahren $7\,000$ € zu erhalten?
c) Wie viel volle Jahre müsste der Endbetrag von b) noch liegen, bis $9\,000$ € erreicht wären?

Aufgabe A4

Ein Kapital von $15\,670$ € wird mit $3{,}5$ % verzinst, Zinses werden mitverzinst. Das Kapital ist dadurch auf $19\,262{,}40$ € angewachsen.
Wie viele Jahre wurde das Kapital verzinst?

Aufgabe A5

Eine Lottospielerin bringt ihren Lottogewinn zur Bank. Ihre $10\,520$ € werden jährlich mit $5{,}5$ % verzinst. Zinsen werden mitverzinst.

a) Auf welchen Betrag würde ihr Gewinn in sechs Jahren anwachsen?
b) Wie lange müsste sie vom Zeitpunkt des Lottogewinns an warten, bis ihr Guthaben auf $20\,000$ € angewachsen wäre?
c) Sie versucht, schneller Gewinn zu machen und setzt ihren Lottogewinn an der Börse ein. Doch ihre Aktien fallen. Ihr Kapital vermindert sich in zwei Jahren um $2\,500$ €.
Wie viel Prozent betrug die jährliche Wertminderung?

Aufgabe A6

Ein anderer Lottospieler gewann $16\,380$ €, die er auf ein Sparkonto einzahlte und für acht Jahre festlegte. Während dieser Zeit wuchs sein Gewinn durch Zinseszins um $13\,200$ € an.

a) Welcher jährliche Zinssatz wurde von der Bank gewährt?
b) Welchen Betrag hätte der Lottospieler nach vier Jahren zusätzlich einzahlen müssen, damit er nach acht Jahren über 35 000 € verfügen konnte?
c) In welcher Zeit wäre sein Lottogewinn bei 5 Prozent Zinseszins um 50 Prozent gewachsen?

Aufgabe A7

Ein Sparer legt 15 000 € für drei Jahre auf 5,5 Prozent Zinseszins fest. Nach Ablauf der drei Jahre bietet ihm die Bank einen Zinssatz von 6,25 % für weitere drei Jahre. Der Sparer nimmt das Angebot an und stockt gleichzeitig sein angespartes Guthaben um 7 386,38 € auf.

a) Welches Endkapital steht dem Sparer nach den sechs Jahren zur Verfügung?
b) Wie viele Zinsen hat er in den sechs Jahren insgesamt bekommen?
c) Welcher Verzinsung entspräche es, wenn er vor sechs Jahren beide Beträge eingezahlt hätte und dafür zusammen 5 000 € an Zinseszins erhalten hätte?

Aufgabe A8

Großeltern schenken ihrem Enkel zur Geburt ein Sparbuch über 6 000 €. Das Geld wird mit 6,25 % Zinseszins angelegt. Zur Vollendung des 11. Lebensjahres erhöhen sie das angesparte Kapital auf 15 000 €.

a) Welchen Betrag müssen die Großeltern zum 11. Geburtstag ihres Enkels zuzahlen?
b) Zu welchem Zinssatz ist das Geld (15 000 €) nach dem 11. Geburtstag angelegt, wenn der Enkel an seinem 21. Geburtstag 25 625 € zur Verfügung hat?
c) In welchem Jahr überschreitet das Kapital 20 000 €, wenn es nach dem 11. Geburtstag zu 6,75 % Zinseszins angelegt wird?

Aufgabe A9

Ein Vater möchte die spätere Ausbildung seines Sohnes finanziell absichern.

a) Welchen Betrag muss er anlässlich der Geburt des Sohnes anlegen, damit seinem Sohn bei einem jährlichen Zinssatz von 8,5 % zum 18. Geburtstag 20 000 € zur Verfügung stehen?
b) Ein anderes Geldinstitut bietet dem Vater an, bei einer Einzahlung von 4 450 € nach achtzehn Jahren 20 000 € auszuzahlen. Mit welchem Zinssatz (Zinseszins) rechnet dieses Institut?
c) Welcher Betrag würde dem Sohn nach achtzehn Jahren zur Verfügung stehen, wenn der Vater bei einem Zinssatz von 8,5 % Zinseszins folgende Einzahlungen vornehmen würde:

heute:	2 000 €
in 4 Jahren:	2 000 €
in 8 Jahren:	2 000 €
in 12 Jahren:	2 000 €

Lösung A1

Umrechnung des Kaufpreises von $2\,700\,DM$ in €:

$K_€ = \frac{K_{DM}}{1{,}95583} = \frac{2700}{1{,}95583} = 1380{,}49\,€$

$K_€ = K_0 = 1380{,}49; \quad n = 60\,J; \quad K_{60} = 50000$

$K_{60} = K_0 \cdot q^{60}$

$50000 = 1380{,}49 \cdot q^{60} \qquad | \quad :1380{,}49$

$q^{60} = 36{,}22 \qquad | \quad \sqrt[60]{}$

$q = 1{,}0616$

$p\% = (q-1) \cdot 100 = (1{,}0616 - 1) \cdot 100 = 6{,}16\,\%$

Der jährliche Wertzuwachs des Oldtimers lag bei $6{,}16\,\%$.

Lösung A2

Hinweis: Die Zinseszinsrechnung berechnet uns nicht den Betrag der Zunahme bzw. des Wertverlustes (Abnahme) eines Wirtschaftsgutes, sondern vielmehr den echten Wert. Wenn ein Auto also $20\,\%$ seines Wertes verliert, dann ist es noch $80\,\%$ Prozent wert.

$K_n = K_0 \cdot q^n$

$K_5 = 70450 \cdot 0{,}8^5 = 23085{,}06$

Nach 5 *Jahren besitzt das Auto noch einen Wert von* $23\,085{,}06\,€$.

Lösung A3

Wegen der Zuzahlungen muss die Zinseszinsformel erweitert werden. Der Betrag der Zuzahlung sei z.

a) $K_5 = (K_0 \cdot q^2 + z) \cdot q^3$

$K_5 = (3430 \cdot 1{,}065^2 + 1200) \cdot 1{,}065^3 = 6148{,}94$

Nach 5 Jahre verfügt die Person über $6\,148{,}94\,€$.

b) $K_5 = (K_0 \cdot q^2 + z) \cdot q^3$

$7000 = (3430 \cdot 1{,}065^2 + z) \cdot 1{,}065^3 \qquad | \quad :1{,}065^3$

$5794{,}94 = 3890{,}39 + z \qquad | \quad -3890{,}39$

$z = 1904{,}55$

Die Person hätte eine Sonderzahlung über $1\,904{,}55\,€$ *leisten müssen.*

c) $K_n = K_b \cdot q^n$

$9000 = 7000 \cdot 1{,}065^n \qquad | \quad :7000$

$\frac{9}{7} = 1{,}065^n \qquad | \quad log$

$log\left(\frac{9}{7}\right) = n \cdot log(1{,}065) \qquad | \quad :log(1{,}065)$

$n = \frac{log\left(\frac{9}{7}\right)}{log(1{,}065)} = 3{,}99$

Das Endkapital von b) hätte noch ganze 4 *Jahre liegen müssen.*

Lösung A4

$K_n = K_0 \cdot q^n$

$19262{,}40 = 15670 \cdot 1{,}035^n \qquad | \quad :15670$

$1{,}229325335 = 1{,}035^n \qquad | \quad log$

$log(1{,}229325335) = n \cdot log(1{,}035) \qquad | \quad :log(1{,}035)$

$n = \frac{log(1{,}229325335)}{log(1{,}035)} = 5{,}9999$

Das Kapital wurde 5 *Jahre lang angelegt.*

Lösung A5

a) $K_6 = K_0 \cdot q^6$

$K_6 = 10520 \cdot 1{,}055^6 = 14505{,}43$

Nach 6 *Jahren wäre das Kapital auf* $14\,505{,}43$ € *angewachsen.*

b) $20000 = 10520 \cdot 1{,}055^n \quad | \quad :10520$

$1{,}901140684 = 1{,}055^n \quad | \quad log$

$log(1{,}901140684) = n \cdot log(1{,}055) \quad | \quad :log(1{,}055)$

$n = \frac{log(1{,}901140684)}{log(1{,}055)} = 11{,}9999$

Das Kapital müsste 12 *Jahre lang angelegt werden.*

c) Exponentielle Abnahme

$K_2 = K_0 \cdot q^2$

$K_2 = 10520 - 2500 = 8020$

$8020 = 10520 \cdot q^2 \quad | \quad :10520$

$q^2 = 0{,}762357414 \quad | \quad \sqrt{}$

$q = 0{,}8731$

$p\,\% = (1 - 0{,}8731) \cdot 100 = 12{,}67\,\%$

Der jährliche Verlust lag bei $12{,}67\,\%$.

Lösung A6

Hinweise: Es ist der Text „wächst der Gewinn $13\,200$ € an" zu beachten. Die sind kein Endkapital, sondern die Zinsen, die der Lottospieler in den 8 Jahren verdient hat.
Wegen der Zuzahlung in Aufgabenteil b) muss die Zinseszinsformel erweitert werden. Der Betrag der Zuzahlung sei z.

a) $K_8 = K_0 \cdot q^8$

$K_8 = K_0 + Z_8 = 16380 + 13200 = 29580$

$29580 = 16380 \cdot q^8 \quad | \quad :16380$

$q^8 = 1{,}805860806 \quad | \quad \sqrt[8]{}$

$q = 1{,}0767$

$p\,\% = (1{,}07671 - 1) \cdot 100 = 7{,}67\,\%$

Die Bank gewährte einen Zins von $7{,}67\,\%$.

b) $K_8 = (K_0 \cdot q^4 + z) \cdot q^4$

$35000 = (16380 \cdot 1{,}0767^4 + z) \cdot 1{,}0767^4 \quad | \quad :1{,}0767^4$

$26042{,}89 = 22013{,}69 + z \quad | \quad -22013{,}69$

$z = 4029{,}20$

Der Lottospieler hätte nach Ablauf der ersten 4 Jahre noch $4\,029{,}20$ € einzahlen müssen.

c) $K_n = K_0 \cdot 1{,}5 = 16380 \cdot 1{,}5 = 24570$

$K_n = K_0 \cdot q^n$

$24570 = 16380 \cdot 1{,}05^n \quad | \quad :16380$

$1{,}5 = 1{,}05^n \quad | \quad log$

$log(1{,}5) = n \cdot log(1{,}05) \quad | \quad :log(1{,}05)$

$n = \frac{log(1{,}5)}{log(1{,}05)} = 8{,}31$

Der Lottogewinn wäre bei $5\,\%$ *Zinsen in* $8{,}3$ *Jahren um* $50\,\%$ *gewachsen.*

Lösung A7

Hinweise: Wegen der Aufteilung in 3 Jahre und 3 Jahre muss in zwei Abschnitten gerechnet werden.

a) $K_3 = K_0 \cdot q^3 = 15000 \cdot 1{,}055^3 = 17613{,}62$
$K_6 = (K_3 + 7386{,}38)q^3 = (17613{,}62 + 7386{,}38) \cdot 1{,}055^3 = 25000 \cdot 1{,}055^3 = 29356{,}03$
Nach 6 Jahren stehen dem Sparer 29 856,03 € zur Verfügung.

b) $Z_{ges} = Z_{1-3} + Z_{4-6}$
$Z_{1-3} = K_3 - K_0 = 17613{,}62 - 15000 = 2613{,}62$
$Z_{4-6} = K_6 - (K_3 + 7386{,}38) = 29356{,}03 - 25000 = 4356{,}03$
$Z_{ges} = 2613{,}62 + 4356{,}03 = 6989{,}65$
Der Sparer hat insgesamt 6 989,65 € Zinsen erhalten.

c) $K_0 = 15000 + 7386{,}38 = 22386{,}38$
$K_6 = K_0 + 5000 = 27386{,}38$
$27386{,}38 = 22386{,}38 \cdot q^6 \quad | \quad : 22386{,}38$
$q^6 = 1{,}223350091 \quad | \quad \sqrt[6]{}$
$q = 1{,}034$
$p\,\% = (1{,}034 - 1) \cdot 100 = 3{,}4\,\%$
Der Zinssatz wäre 3,4 % *gewesen.*

Lösung A8

a) $K_{11} = K_0 \cdot q^{11} = 6000 \cdot 1{,}0625^{11} = 11688{,}79$
Aufstockung auf 15 000 €:
$A = 15000 - K_{11} = 15000 - 11688{,}79 = 3311{,}21$
Die Großeltern müssen 3 311,21 € *zuzahlen, um das angesparte Kapital auf* 15 000 € *zu erhöhen.*

b) $K_{21} = K_{11} \cdot q^{10}$
$25625 = 15000 \cdot q^{10} \quad | \quad : 15000$
$q^{10} = 1{,}708333333 \quad | \quad \sqrt[10]{}$
$q = 1{,}055$
$p\,\% = (1{,}055 - 1) \cdot 100 = 5{,}5\,\%$
Das Geld wurde mit 5,5 % *verzinst.*

c) $K_n = K_{11} \cdot q^n$
$20000 = 15000 \cdot 1{,}0675^n \quad | \quad : 15000$
$\frac{4}{3} = 1{,}0675^n \quad | \quad log$
$log\left(\frac{4}{3}\right) = n \cdot log(1{,}0675) \quad | \quad : log(1{,}0675)$
$n = \frac{log\left(\frac{4}{3}\right)}{log(1{,}0675)} = 4{,}40$
Im 5. *Jahr nach dem* 11. *Geburtstag übersteigt das Kapital einen Betrag von* 20 000 €

Lösung A9

a) $K_n = K_0 \cdot q^n$
$20000 = K_0 \cdot 1{,}085^{18} \quad | \quad : 1{,}085^{18}$
$K_0 = 8845{,}71$
Der Vater muss 8 845,71 € *anlegen.*

b) $K_n = K_0 \cdot q^n$

$20000 = 4450 \cdot q^{18} \quad | \quad :4450$

$q^{18} = 4{,}494382 \quad | \quad \sqrt[18]{}$

$q = 1{,}0871$

$p\,\% = (1{,}08714 - 1) \cdot 100 = 8{,}71\,\%$

Das Bankinstitut biete $8{,}71\,\%$*.*

c) Gestaffelte Einzahlungen:

Die Einzahlungen seien $E_1;\ E_2;\ E_3$ und E_4, dann gilt

$K_{18} = E_1 \cdot q^{18} + E_2 \cdot q^{14} + E_3 \cdot q^{10} + E_4 \cdot q^6$

$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 2000$

$K_{18} = 2000 \cdot (q^{18} + q^{14} + q^{10} + q^6) = 200 \cdot (1{,}085^{18} + 1{,}085^{14} + 1{,}085^{10} + 1{,}085^6)$

$K_{18} = 22736{,}62$

Dem Sohn stünden $22\,736{,}62$ € *zur Verfügung.*